Skalowanie obrazów rastrowych II: Interpolacja i aproksymacja

Przemysław Śliwiński

3 września 2022

„*Beautiful objects are wrought by study through effort, but ugly things are reaped automatically without toil*"

Demokryt

Przypomnienie

Splotem (dyskretnym) nazywamy następujący operator (przekształcenie ciągu w ciąg):

$$
\begin{aligned}
(\lambda * f)(x_n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k f(x_{n-k}) \\
&= \ldots + \lambda_{-1} f(x_{n+1}) + \lambda_0 f(x_n) + \lambda_1 f(x_{n-1}),
\end{aligned}
$$

gdzie, ciągi $\{\lambda_n\}$ i $\{f(x_n)\}$ są w naszym przypadku odpowiedzią impulsową i sygnałem (obrazem). Splatając obrazy (sygnały dwuwymiarowe) często korzystamy z założenia o separowalności odpowiedzi impulsowej, dzięki której

$$\lambda_{nm} = \lambda_n \cdot \lambda_m,$$

a stąd

$$(\lambda ** f)(x_{nm}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \lambda_l f(x_{n-k,m-l}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \lambda_l f(x_{n-k,m-l}),$$

w konsekwencji, możliwa jest implementację splotu 2D z wykorzystaniem algorytmów opracowanych dla przypadku jednowymiarowego.

1 Zakres ćwiczenia

1.1 Rozgrzewka

1. Zaimplementować funkcję próbkującą zadaną funkcję w K punktach i zapamiętującą próbki w postaci wektora.
2. Opracować wersję 2D powyższej funkcji. Sprawdzić i zilustrować efekt działania dla każdej z funkcji interpolujących $\Pi(), \Lambda()$ oraz $\Omega()$.

1.2 Ćwiczenie właściwe – powiększanie i pomniejszanie obrazów

1. Dla wybranego obrazu o rozmiarach 1024×1024 pikseli [1] należy wygenerować jego wersje wygładzone za pomocą splotu obrazu ze spróbkowanymi funkcjami $\Pi(), \Lambda()$ oraz $\Omega()$ o wybranych liczbach próbek $K = 3 * 2^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ a następnie pomniejszyć je do rozmiarów $2^p \times 2^p, p = 7, 8$ pikseli oraz (być może z pomocą tych samych funkcji interpolujących) przywrócić im oryginalny rozmiar.
2. Ponownie oznaczając przez $O(n, m)$ i $O_{\phi,\psi}(n, m)$ obraz oryginalny oraz przeskalowany i przywrócony do początkowej wielkości z pomocą wybranych funkcji interpolujących $\phi(), \psi() \in \{\Pi(), \Lambda(), \Omega()\}$, wyznaczyć jakość obrazów wynikowych za pomocą poniższych formuł dla każdej z wartości K oraz p:

$$\begin{aligned} MSE &= \sum_n \sum_m \left(O(n,m) - O_{\phi,\psi}(n,m)\right)^2 \\ MAE &= \sum_n \sum_m \left|O(n,m) - O_{\phi,\psi}(n,m)\right| \end{aligned}$$

   i na tej podstawie wybrać (obiektywnie) najlepszy schemat interpolacji.
3. Wybrać **subiektywnie**[2] najlepszą spośród funkcji interpolujących wraz z najlepszą dla niej wartością K dla każdego p. [3]
4. Powtórzyć powyższe[4] ćwiczenia dla wersji obrazu o średniej liczbie fotonów pomniejszonej $\eta = 1, 4, 16, 64, 256$ razy względem oryginalnego obrazu $O(n, m)$ (w Matlabie: `'poissrnd(O/eta)*eta'`).

[1] Np. znów kwiatów karnegii olbrzymiej.
[2] I spróbować uzasadnić!
[3] Czy istnieje zależność pomiędzy K a p?
[4] wygenerować, wygładzić, pomniejszyć, powiększyć obraz

5. Porównać z wynikami z poprzedniego ćwiczenia i wyciągnąć wnioski.

2 Zadanie dodatkowe – dekonwolucja

Zaproponować filtr „rozsplotowy” [5] wyostrzający obraz tak aby po jego wygładzeniu z funkcjami interpolującymi (a przed pomniejszeniem) można było uzyskać obraz oryginalny. [6]

[5] Albo „rozplot”? „Rozsplot”?? Skoro można „rozsupłać” albo „rozplątać”?
[6] Czy to jest możliwe? Kiedy? Dla jakich obrazów?