

Aproksymacja ortogonalna – redukcja zakłóceń

Przemysław Śliwiński

3 września 2022

*„Get your facts first, and then you can
distort them as much as you please.”*

Mark Twain

1 Wprowadzenie

1.1 Transformata Anscombe’a

Jeśli zmienna losowa (jasność piksela) X ma rozkład Poissona o średniej λ , to zmienna losowa

$$A = 2\sqrt{X + \frac{3}{8}}$$

ma (w przybliżeniu) rozkład normalny $\mathcal{N}(2\sqrt{\lambda + 3/8}, 1)$. Odwrotna transformata ma postać¹

$$X = \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{8}.$$

1.2 Wygładzanie transformatowe

Schemat przetwarzania transformatowego składa się z następujących kroków:

- Transformata Anscombe’a
- Transformata ortogonalna
- Operacja na współczynnikach transformaty
- Odwrotna transformata ortogonalna
- Odwrotna transformata Anscombe’a

¹Dla małych wartości (powiedzmy $\lambda < 10$), warto porównać wyniki stosując dokładniejszą formułę

$$X = \frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{A} - \frac{11}{8}\frac{1}{A^2} + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{A^3}$$

2 Ćwiczenie – wygładzanie/redukcja zakłóceń

1. Na podstawie przykładowego obrazu, np. *H-D Road King* wygenerować jego wersję z zakłóceniami (korzystając ze znanego już generatora szumu Poissona z parametrem $\lambda = 1$).^{2,3}
2. Na tak uzyskanym obrazie dokonać redukcji zakłóceń za pomocą każdej z poniższych metod progowania oraz kwantyzacji⁴ współczynników transformaty $\{\alpha_{mn}\}$

$$\bar{\alpha}_{nm}^T = \begin{cases} \alpha_{mn} & \text{gdy } |\alpha_{mn}| > T \\ 0 & \text{gdy } |\alpha_{mn}| \leq T \end{cases} \quad \text{oraz } \bar{\alpha}_{nm}^Q = \frac{\lfloor Q \cdot \alpha_{mn} + \frac{1}{2} \rfloor}{Q}, \quad (1)$$

z wybraną wartością progu $T \in \mathbb{R}^+$ oraz ziarna kwantyzacji $Q \in \mathbb{Z}$, w oparciu o:

- transformatę kosinusową (DCT)
- transformatę Walsha-Hadamarda (WHT)
- transformaty falkowe (FWT)⁵
 - ortogonalną Haara
 - biortogonalną 5/3
 - biortogonalną 9/7

3. W każdym z przypadków

- Porównać obraz wygładzony z niezakłóconym oryginałem mierząc błąd średniokwadratowy (lub inny, wybrany w poprzednich ćwiczeniach), a następnie
- Wybrać najlepsze progi T i ziarna kwantyzacji Q , porównać ze sobą tak wygładzone obrazy.
- Wyznaczyć i porównać liczbę niezerowych współczynników dla obu tych obrazów.

4. Wyciągnąć wnioski.

²Przyjmując wartości pikseli za średnie w generatorze zmiennych losowych o rozkładzie Poissona.

³*How to tell smoothing from denoising?*

⁴Dlaczego dodajemy $\frac{1}{2}$ w (1)? A gdybyśmy w to miejsce wstawili np.

$$\frac{1}{2} - \frac{\text{sgn}(\alpha_{mn})}{4}?$$

⁵W standardzie falkowej kompresji obrazów JPEG 2000 stosowane jest dwójkowe ziarno kwantyzacji ($Q = 2^q, q \in \mathbb{Z}$), które posiada prostą interpretację: q oznacza dokładność kwantyzacji wyrażoną liczbą zachowanych bitów (cyfr binarnych).



Rysunek 1: *Harley-Davidson Road King (@Great Canyon, AZ)*