Interpolacja – skalowanie obrazów rastrowych

Przemysław Śliwiński

3 września 2022

„A picture may be worth a thousand words,
a formula is worth a thousand pictures.“

Edsger W. Dijkstra

Spis treści

Streszczenie

Zadanie polega na porównaniu jakości interpolacji obrazów o niskim poziomie sygnału względem szumu z wykorzystaniem rozkładu Poissona. [1]

Przypomnienie

Niech $\lambda > 0$ oznacza średnią liczbę fotonów rejestrowanych w jednostce czasu, a X liczbę zarejestrowanych w tej jednostce. Wówczas X przyjmie jedną z

[1]Rozkład ten stanowi dobre przybliżenie obrazów rzeczywistych rejestrowanych w zarówno w dobrych warunkach oświetleniowych, jak i przy „niekorzystnym świetle”, zob. np. [1].

wartości $k = 0, 1, \ldots,$ z prawdopodobieństwem określonym rozkładem Poissona:

$$P\left(X = k \,|\lambda\right) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Niech $p \in (0, 1)$ oznacza prawdopodobieństwo powodzenia w rozkładzie dwumianowym (Bernoulliego). Jeśli X poddamy próbie Bernoulliego, to wówczas zmienna losowa Y odpowiadająca udanej próbie ma rozkład Poissona ze średnią $p \cdot \lambda$.

1 Zakres ćwiczenia

1.1 Rozgrzewka...

Niech kolejne cyfry numery indeksu utworzą zbiór $\{k_i\}_{i=1}^{6}$. Należy wyznaczyć:

1. Prawdopodobieństwo zarejestrowania $X = k_i$, dla $i = 1, \ldots, 6$ fotonów, przy założeniu, że $\lambda = 1$ („*L'embarras des richesses*").

2. Prawdopodobieństwo zarejestrowania $X = 0$ fotonów, jeśli $\lambda = k_i$, dla $i = 1, \ldots, 6$ („*Le malheur*").

3. Prawdopodobieństwo zarejestrowania nie mniej niż $X = \sum_{k=1}^{6} k_i$ fotonów, gdy średnia liczba fotonów wynosi $\Lambda = \sum_{k=1}^{6} k_i$ („*image stacking*"). [2]

4. Prawdopodobieństwo nie więcej niż $X = \sum_{k=1}^{6} k_i$ fotonów z przykładu powyżej, gdy efektywność kwantowa matrycy wynosi $QE = \pi/4$.

1.2 Ćwiczenie właściwe – powiększanie i pomniejszanie obrazów

Dla wybranego obrazu o rozmiarach 1024×1024 pikseli [3] należy wygenerować jego wersje dla średniej liczby fotonów $\lambda = 1, 4, 16, 64, 256, 1024$. Następnie, w oparciu o znane już schematy interpolacji, oparte o funkcje $\Pi(), \Lambda(), \Omega(),$ [4] pomniejszyć je do rozmiarów 100×100 pikseli oraz (być może z pomocą tych

[2] Suma dowolnej liczby niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona ma rozkład Poissona (liczba tych zmiennych może mieć rozkład Poissona!).

[3] Np. kwiatów kaktusa saguaro.

[4] Odpowiednio, jądro prostokątne, trójkątne i funkcja Keysa

samych funkcji interpolujących) przywrócić im oryginalny rozmiar. Oznaczając przez $O(n,m)$ i $O_{\phi,\psi}(n,m)$ obraz oryginalny oraz przeskalowany i przywrócony do początkowej wielkości z pomocą wybranych funkcji interpolujących $\phi(), \psi() \in \{\Pi(), \Lambda(), \Omega()\}$, wyznaczyć jakość obrazów wynikowych za pomocą poniższych formuł:

$$
\begin{aligned}
MSE &= \frac{1}{nm}\sum_n \sum_m \left(O\left(n,m\right) - O_{\phi,\psi}\left(n,m\right)\right)^2 \\
MAE &= \frac{1}{nm}\sum_n \sum_m \left|O\left(n,m\right) - O_{\phi,\psi}\left(n,m\right)\right|
\end{aligned}
$$

i na jej podstawie wybrać (obiektywnie) najlepszy schemat interpolacji.

2 Zadanie dodatkowe

Spośród wersji uogólnionej średniej: https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_mean#Special_cases wybrać tę, która najbardziej odpowiada wizualnej (subiektywnej) ocenie jakości.

3 Materiały pomocnicze

Przed realizacją ćwiczenia należy zapoznać się z rozdziałem w monografii [1] https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-18443-7_1.

Literatura

[1] Peter Seitz and Albert JP Theuwissen. *Single-photon imaging*, volume 160. Springer, 2011.