Ortogonalny estymator funkcji regresji

Przemysław Śliwiński

27 kwietnia 2018

1 Estymator ortogonalny (Gassera-Müllera)

1. Wygenerować $N = 1024$ par pomiarów wejścia-wyjścia $\{(X_n, Y_n)\}$ systemu statycznego o nieliniowej charakterystyce $m(x) = \arctan^2(2x)$ w przedziale $[-\pi, \pi]$. Wejścia $\{X_n\}$ mają mieć gęstość $f(x)$ trójkątną na tym przedziale. Wyjście systemu zakłócić szumem białym $\{Z_n\}$ o ustandardyzowanych rozkładach:

   (a) Gaussa

   (b) Cauchy'ego.

2. Na podstawie podciągów dla $N = 128, 256, 512$ i 1024 wyestymować nieliniowość $m(x)$ za pomocą estymatora ortogonalnego G-M danego (dla bazy ortogonalnej kosinusowej) wzorem

$$\hat{m}_K(x) = \sum_{k=0}^{K} \hat{\alpha}_k \cdot \cos(kx),$$

   gdzie

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{n=1}^{N} Y_{(n)} \cdot \int_{X_{[n-1]}}^{X_{[n]}} \cos(kx)\, dx$$

   i gdzie $\left\{\left(X_{[n]}, Y_{(n)}\right)\right\}$ są posortowanymi (względem rosnącego wejścia) parami pomiarów $\{(X_n, Y_n)\}$ (przy czym $X_0 = -\pi$).

3. Dobrać parametr odcięcia $K > 0$ (ang. *cut-off parameter*) tak, aby uzyskać najmniejszy (empiryczny) błąd średniokwadratowy

$$emperror(h) = \frac{1}{2Q} \sum_{q=-Q}^{Q} \left[m(x_q) - \hat{m}_K(x_q)\right]^2, \quad (1)$$

   dla wybranego (z uzasadnieniem doboru!) ciągu $\left\{x_q = \frac{q}{Q}\right\}, q = -Q, \ldots, Q$).

4. Porównać i zinterpretować wyniki działania estymatora dla zakłóceń o rozkładach Gaussa i Cauchy'ego.

5. *** Uzasadnić wzór na estymator współczyników rozwinięcia $\hat{\alpha}_k$.