

# Jądrowa estymacja funkcji regresji\* (wersja III)

Przemysław Śliwiński

20 kwietnia 2018

## 1 Jądrowy estymator regresji

1. Wygenerować ciąg liczb  $\{X_1, \dots, X_N\}$ ,  $N = 1024$ , o gęstości trójkątnej w przedziale  $[-1, 1]$ .
2. Dla uzyskanego ciągu wygenerować wartości

$$Y_n = m(X_n) + Z_n, \quad n = 1, \dots, N$$

gdzie

$$m(x) = \sqrt[3]{x} \text{ oraz } Z_n \sim N(0, 0.05)$$

3. Zaimplementować *jądrowy estymator regresji* o postaci:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \bar{m}_h(x) &= \frac{\frac{1}{Nh} \sum_{n=1}^N Y_n \cdot K\left(\frac{x-X_n}{h}\right)}{\frac{1}{Nh} \sum_{n=1}^N K\left(\frac{x-X_n}{h}\right)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N Y_n \cdot K\left(\frac{x-X_n}{h}\right)}{\sum_{n=1}^N K\left(\frac{x-X_n}{h}\right)}, \end{aligned} \quad (1)$$

przyjmując

$$h = 1/2, 1/4, \dots, 1/128 \quad (= 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-7})$$

gdzie  $K(x)$  jest jądrem:

(a) prostokątnym

$$K(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x),$$

---

\*W tym również gęstości!

<sup>1</sup>Viva Mallorca!

(b) trójkątnym

$$K(x) = (1 - |x|) \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x),$$

oraz

(c) Epanecznikowa

$$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x),$$

(d) Keysa<sup>2</sup>

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4|x| + 2 & \text{dla } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & 2 < |x| \end{cases}.$$

4. Wyznaczyć  $h$  takie, aby błąd estymatora, dla każdego z powyższych  $K(x)$ , dany formułą

$$\text{validation}(h) = \frac{1}{2Q} \sum_{q=-Q}^Q \left[ \bar{m}_h\left(\frac{q}{Q}\right) - m\left(\frac{q}{Q}\right) \right]^2$$

był jak najmniejszy (przyjąć  $Q = 100$ ).

5. Dla wybranego w ten sposób  $h$  wykreślić i zinterpretować wykresy

- (a) licznika,
- (b) mianownika, oraz
- (c) całego estymatora w (1).

6. Zastąpić zakłócenie normalne  $Z_n$ , zakłóceniem o rozkładzie Cauchy'ego  $C(0, 0.01)$  i powtórzyć eksperyment.
7. Wyciągnąć wnioski. Zwrócić m.in. uwagę na zachowanie estymatora na krańcach przedziału  $[-1, 1]$ .

---

<sup>2</sup>Zob. np. [http://hmi.stanford.edu/doc/Tech\\_Notes/filtergram\\_interpolation/Keys\\_cubic\\_interp.pdf](http://hmi.stanford.edu/doc/Tech_Notes/filtergram_interpolation/Keys_cubic_interp.pdf) (str. 1155, wzór (15)).