Generowane liczb pseudolosowych z wykorzystaniem odwrotnej dystrybuanty

Przemysław Śliwiński

Modelowanie i identyfikacja - laboratorium

8 marca 2016

1 Algorytm generowania liczb (pseudo-)losowych

Mamy dystrybuantę $F(x)$. W ogólności, dystrybuantę odwrotną $F^{-1}(u)$ można, dla $x \in [0,1]$, zdefiniować jako

$$F^{-1}(u) = \inf_x \{x \,| F(x) \geq u\}$$

Mając teraz zmienne losowe U_i o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0,1]$, możemy wygenerować zmienne X_i o rozkładzie $F(x)$ korzystając z odwrotnej dystrybuanty $F^{-1}(u)$

$$X_i = F^{-1}(U_i).$$

2 Rozkład Cauchy'ego

1. Znaleźć gęstość $f(x)$ tego rozkładu, a następnie wyznaczyć jego dystrybuantę $F(x)$ i jej funkcję odwrotną $F^{-1}(u)$.
2. Wygenerować ciąg $N = 1024$ liczb pseudolosowych mających ustandardyzowany rozkład Cachy'ego.
3. Wykreślić histogram otrzymanego ciągu.
4. Zaproponować test statystyczny[1] i zweryfikować z jego pomocą hipotezę, że wygenerowany ciąg ma żądany rozkład.

[1] Np. test Kołmogorowa-Smirnova.

3 Rozkład Gaussa

1. Znaleźć gęstość $f(x)$ rozkładu normalnego, a następnie (spróbować!!!) wyznaczyć jego dystrybuantę $F(x)$ i funkcję odwrotną $F^{-1}(u)$.
2. Jeśli się nie uda... skorzystać z algorytmu Boxa-Müllera, a następnie
3. wygenerować ciąg $N = 1024$ liczb pseudolosowych mających ustandardyzowany rozkład normalny.
4. Wykreślić histogram otrzymanego ciągu.
5. Zaproponować test statystyczny[2] i zweryfikować z jego pomocą hipotezę, że wygenerowany ciąg ma żądany rozkład.

4 Uzasadnienie poprawności algorytmu

Proof. Przypomnijmy, że dystrubanta $F(x)$ określa prawdopodobieństwem zdarzenia, że $X \leq x$, tj.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Aby zatem wykazać, że dystrybuantą zmiennej losowej $F^{-1}(U)$ jest $F(x)$ przekształcimy odpowiednio $P\left(F^{-1}(U) \leq x\right)$. W tym celu zauważmy (**?**), że dla ściśle monotonicznych $F(x)$ mamy (**??**), że

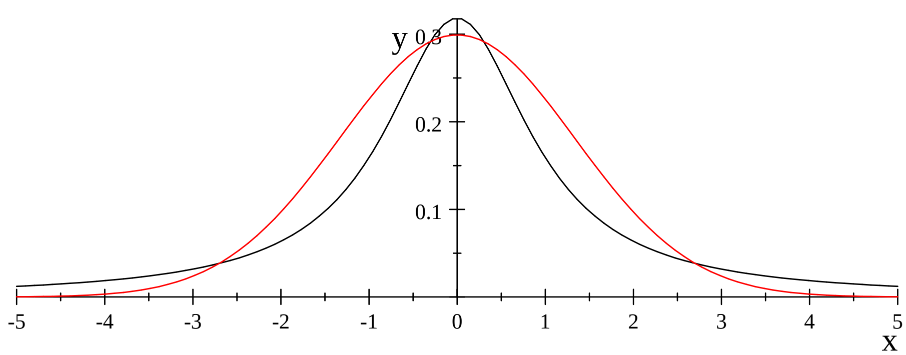
$$P\left(F^{-1}(U) \leq x\right) = P\left(F\left(F^{-1}(U)\right) \leq F(x)\right) = P(U \leq F(x)),$$

a ponieważ $U \sim [0,1]$, to ostatecznie (**???**)

$$P(U \leq F(x)) = F(x).$$

■

[2] Może być ten sam, co dla rozkładu Cauchy'ego.



Rysunek 1: Cauchy & Gauss