Jądrowy estymator funkcji regresji

dr hab. inż. Przemysław Śliwiński

26 kwietnia 2015

1 Estymator jądrowy (Nadaraya'i-Watsona)

1. Wygenerować $N = 1024$ par pomiarów wejścia-wyjścia $\{(X_n, Y_n)\}$ systemu statycznego o nieliniowej charakterystyce $m(x) = \arctan(2x)$. Wejścia $\{X_n\}$ mają mieć gęstość $f(x)$ z poprzednich zajęć (parzystą, nieciągłą, odcinkami stałą). Wyjście systemu zakłócić szumem białym $\{Z_n\}$ o ustandardyzowanych rozkładach:

    (a) Gaussa

    (b) Cauchy'ego.

2. Na podstawie podciągów dla $N = 128, 256, 512$ i 1024 wyestymować nieliniowość $m(x)$ za pomocą estymatora jądrowego N-W danego wzorem

$$\hat{m}_h(x) = \frac{\sum_{n=1}^{N} Y_n \cdot K_h(x, X_n)}{\sum_{n=1}^{N} K_h(x, X_n)},$$

    dla wybranych jąder $K_h(x, X) = h^{-1}K\left(h^{-1}(x - X)\right)$, dobierając parametr wygładzania $h > 0$ (ang. *bandwidth parameter*) tak, aby uzyskać najmniejszy (empiryczny) błąd średniokwadratowy

$$\mathit{emperror}(h) = \sum_{q=-Q}^{Q} \left[m(x_q) - \hat{m}_h(x_q)\right]^2, \tag{1}$$

    dla wybranego (z uzasadnieniem doboru!) ciągu $\{x_q\}, q = -Q, \ldots, Q$).

3. Porównać i zinterpretować wyniki działania estymatora dla zakłóceń o rozkładach Gaussa i Cauchy'ego.

4. ** Wykazać, że nieliniowa charakterystyka systemu $m(x)$ jest funkcją regresji wyjścia systemu na jego wejście

$$E\{Y_n | X_n = x\} = m(x).$$

5. *** Wyprowadzić estymator N-W minimalizując $\Phi(c;x)$ względem $c = m(x_0)$, przy czym

$$\Phi(c;x) = \sum_{n=1}^{N} [Y_n - c]^2 \, \phi_h(x, X_n) \, .$$