PODSTAWY STEROWANIA
Tom 3 (1973), z. 1
pp. 11—18

Nieparametryczna identyfikacja charakterystyk statycznych

WŁODZIMIERZ GREBLICKI

(Maszynopis wpłynął 19 listopada 1972)

W pracy przedstawiono nieparametryczną metodę identyfikacji charakterystyk statycznych. Wykorzystano w niej nieparametryczne sposoby estymacji nieznanych gęstości prawdopodobieństwa. Rozpatrzono dwa przypadki, gdy gęstość prawdopodobieństwa sygnału wejściowego jest znana i nieznana. Wykazano, że odpowiednie ciągi charakterystyk modeli są zbieżne do funkcji regresji pierwszego rodzaju, gdy ilość obserwacji wejścia i wyjścia wzrasta.

1. Wstęp

Przy identyfikacji charakterystyk statycznych w warunkach probabilistycznych nieznaną charakterystykę obiektu aproksymuje się z reguły funkcjami z pewnej, dość arbitralnie wybranej klasy, co sprowadza zadanie do znalezienia funkcji regresji II rodzaju [1, 3, 4]. Najlepsza, w przyjętej klasie, charakterystyka różni się jednak od charakterystyki najlepszej w ogóle. Ponadto, otrzymany model zależy od rozkładu prawdopodobieństwa sygnału wejściowego, co powoduje, że w sytuacji, gdy po zakończeniu procesu identyfikacji rozkład ten zmieni się, to model przestanie być najlepszy nawet w swojej klasie. Klasę modeli ogranicza się także w sposób pośredni poprzez aproksymację nieznanych rozkładów prawdopodobieństwa funkcjami z określonej klasy [2].

Powyższych wad i niedogodności można uniknąć, gdy nieznaną funkcję regresji I rodzaju estymuje się metodami nieparametrycznymi [5]. Jak wykazano w poniższej pracy, taki sposób postępowania pozwala, dla kwadratowego wskaźnika jakości identyfikacji, otrzymać model najlepszy wśród wszystkich możliwych modeli. Udowodniono, że otrzymany tą drogą nieparametryczny estymator funkcji regresji I rodzaju jest zgodny.

2. Przedstawienie problemu

W pracy identyfikuje się obiekt statyczny o wejściu skalarnym u, skalarnym wyjściu y, na który działają zakłócenia natury losowej. Powodują one, że nawet przy ustalonym wejściu wyjście zmieniałoby się losowo. Własności obiektu charakteryzuje warunkowa gęstość prawdopodobieństwa $f(y/u)$, o której zakłada się, że nie zmienia się podczas eksperymentu. Własności losowego sygnału wejściowego określa gęstość $f_u(u)$. Zarówno obiekt, jak i wejście są stacjonarne, łączna gęstość $f(u, y)$ jest więc stała. Wejście u_n i wyjście y_n zaobserwowane w chwili n są zatem realizacjami zmiennych losowych U_n i Y_n o łącznej gęstości $f(u, y)$. Ponadto U_n, Y_n i U_m, Y_m są dla $n \neq m$ stochastycznie niezależne.

Zadanie identyfikacji polega na znalezieniu charakterystyki $\Phi(u)$ modelu, dla której wskaźnik

$$\int_u \int_y \left(y-\Phi(u)\right)^2 f(u, y)\, du\, dy$$

osiąga najmniejszą wartość. Charakterystyka najlepszego modelu jest, jak jak wiadomo, funkcją regresji pierwszego rodzaju i wyraża się wzorem

$$\Phi^*(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{f_u(u)} \int_y y f(u, y)\, dy\,. \tag{1}$$

Eksperyment prowadzony jest w warunkach, gdy gęstość $f(y/u)$, która charakteryzuje obiekt, nie jest znana. Rozważymy przy tym dwa przypadki, gdy znane są własności statystyczne sygnału wejściowego (tzn. gęstość $f_u(u)$) oraz, gdy gęstość $f_u(u)$ nie jest znana. Jedyną informacją o obiekcie są obserwacje

$$u_1, y_1;\ u_2, y_2;\ \ldots;\ u_n, y_n\,.$$

Na ich podstawie nieznaną charakterystykę $\Phi^*(u)$ estymuje się wyrażeniem

$$\Phi_n'(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n h(n) f_u(u)} \sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right) \tag{2}$$

w przypadku, gdy gęstość $f_u(u)$ jest znana oraz według wzoru

$$\Phi_n''(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}\,, \tag{3}$$

gdy gęstość ta jest nie znana; $h(n)$ jest pewnym ciągiem liczb, a $K(u)$ odpowiednio dobraną funkcją.

Wykażemy, że określone w ten sposób nieparametryczne estymatory funkcji regresji $\Phi^*(u)$ są zgodne przy właściwym wyborze ciągu $h(n)$ i funkcji $K(u)$.

3. Zbieżność procesu identyfikacji

Wykażemy teraz, że przy pewnych założeniach odnośnie do obiektu, ciągu $h(n)$ i funkcji $K(u)$ przedstawione powyżej algorytmy identyfikacji są zbieżne.

Oznaczmy jeszcze przez U i Y zmienne losowe o łącznej gęstości $f(u, y)$.

TWIERDZENIE

Jeżeli

$$EY^4 < \infty\,, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sup_u |K(u)| < \infty, \quad \int_u K(u)du = 1, \quad \int_u |K(u)|du < \infty, \\ &\int_u K^4(u)du < \infty, \quad \lim_{|u|\to\infty} |uK(u)| = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

oraz

$$h(n) > 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} h(n) = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} nh^2(n) = \infty\,, \tag{6}$$

to

$$\frac{1}{nh(n)f_u(u)} \sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h(n)}\right) \to \Phi^*(u) \tag{7}$$

i

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u-U_i}{h(n)}\right)} \to \Phi^*(u) \tag{8}$$

według prawdopodobieństwa, gdy $n\to\infty$, w punktach u, w których zarówno $f_u(u)$, jak i $\Phi^*(u)$ są funkcjami ciągłymi.

Dowód

W celu wykazania zbieżności (7) wystarczy oczywiście dowieść, że

$$\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right) \to \int_y yf(u, y)dy \tag{9}$$

(zamiast $h(n)$ będziemy pisać h). Zauważmy w tym celu, że

$$E\left\{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right) - \int_y yf(u, y)dy\right\}^2 =$$

$$= \operatorname{var}\left[\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right)\right] + \left|E\left\{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right)\right\} - \right.$$

$$\left. - \int yf(u, y)dy\right|^2. \tag{10}$$

Wykażemy teraz, że obydwa składniki powyższej sumy dążą do zera, gdy $n \to \infty$.

Dla pierwszego z nich otrzymuje się

$$\operatorname{var}\left[\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right)\right] = \frac{1}{nh^2}\operatorname{var}\left[YK\left(\frac{u-U}{h}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{nh^2} E\left\{Y^2K^2\left(\frac{u-U}{h}\right)\right\} \leqslant \frac{1}{nh^2}(EY^4)^{1/2}\left(EK^4\left(\frac{u-U}{h}\right)\right)^{1/2} =$$

$$\le \frac{1}{nh^2} EY^2\cdot[\sup_u K(u)]^2$$

$$= \frac{1}{nh^{3/2}}(EY^4)^{1/2}\left(\frac{1}{h}\int_v K^4\left(\frac{v}{h}\right) f_u(u-v)\,dv\right)^{1/2}.$$

Z twierdzenia 1A podanego przez Parzena w pracy [6] oraz założeń (5) i (6) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_v K^4\left(\frac{v}{h}\right) f_u(u-v)\,dv = f_u(u)\int_u K^4(u)\,du$$

w punktach ciągłości gęstości $f_u(u)$, skąd wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}\left[\frac{1}{hn}\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right)\right] = 0\,.$$

W celu wykazania zbieżności do zera drugiego składnika sumy (10) zauważmy, że

$$E\left\{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right)\right\} = \frac{1}{h}\int_y\int_v yK\left(\frac{v}{h}\right) f(u-v,y)\,dy\,dv$$

oraz

$$\int_y yf(u,y)\,dy = \frac{1}{h}\int_y\int_v yK\left(\frac{v}{h}\right) f(u,y)\,dy\,dv\,.$$

Zatem

$$w_n \stackrel{\text{def}}{=} E\left\{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{u-U_i}{h}\right) - \int_y yf(u,y)\,dy\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_v\int_y y[f(u-v,y)-f(u,y)]K\left(\frac{v}{h}\right) dv\,dy\,.$$

Podzielmy teraz prostą całkowania względem zmiennej v na dwa obszary, w których odpowiednio $|v| \leqslant \delta$ i $|v| > \delta$. Wówczas

$$|w_n| \leqslant \sup_{|v|\leqslant\delta}\left|\int_y yf(u-v,y)\,dy - \int_y yf(u,y)\,dy\right| \int_{|v|\leqslant\delta/h}|K(v)|\,dv +$$

$$+ \int_{|v|>\delta}\left[\int_y \frac{1}{|v|} yf(u-v,y)\,dy\right]\frac{|v|}{h}K\left(\frac{v}{h}\right) dv + \left|\int_y yf(u,y)\,dy\right| \frac{1}{h}\int_{|v|>\delta}\left|K\left(\frac{v}{h}\right)\right| dv \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|v|\leqslant\delta} |\Phi^*(u-v)f_u(u-v)-\Phi^*(u)f_u(u)| \left|\int_v\right| K(v)|dv+$$

$$+\frac{1}{\delta}\sup_{|v|>\delta/h}|vK(v)|\int_v\int_y |y|f(v,y)\,dv\,dy+|\Phi^*(u)f_u(u)|\int_{|v|>\delta/h}|K(v)|dv \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|v|>\delta} |\Phi^*(u-v)f_u(u-v)-\Phi^*(u)f_u(u)| \int_v |K(v)|dv+$$

$$+\frac{1}{\delta}E|Y|\sup_{|v|>\delta/h}|vK(v)|+|\Phi^*(u)f_u(u)|\int_{|v|>\delta/h}|K(v)|dv\,.$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$ można teraz wybrać takie $H > 0$ oraz odpowiednio małą liczbę $\delta > 0$, aby otrzymane wyrażenie było mniejsze od ε dla wszystkich $h < H$, co kończy dowód zbieżności (9), a zatem i (7).

Parzen wykazał [6], że przy założeniach (5) i (6)

$$\frac{1}{nh(n)}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u-U_i}{h(n)}\right) \to f_u(u)$$

w punktach ciągłości gęstości $f_u(u)$. Stąd oraz z udowodnionej powyżej zbieżności (9) wynika teza (8), co kończy dowód.

4. Algorytmy identyfikacji

Dla różnych funkcji $K(u)$ otrzymuje się różne ciągi charakterystyk modeli. Jeśli np.

$$K(u) = \tfrac{1}{2}e^{-|u|}$$

to

$$\Phi_n'(u) = \frac{1}{2nh(n)f_u(u)}\sum_{i=1}^{n} y_i e^{-\frac{|u-u_i|}{h(n)}}, \qquad \Phi_n''(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i e^{-\frac{|u-u_i|}{h(n)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{|u-u_i|}{h(n)}}}\,.$$

Dla

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}$$

otrzymuje się

$$\Phi_n'(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}nh(n)f_u(u)}\sum_{i=1}^{n} y_i e^{-\frac{(u-u_i)^2}{h^2(n)}}, \qquad \Phi_n''(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i e^{-\frac{(u-u_i)^2}{h^2(n)}}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{(u-u_i)^2}{h^2(n)}}}\,.$$

Jeśli natomiast

$$K(u) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}$$

to

$$\Phi_n'(u) = \frac{1}{\pi n h(n) f_u(u)} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i h^2(n)}{h^2(n)+(u-u_i)^2}, \qquad \Phi_n''(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{h^2(n)+(u-u_i)^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h^2(n)+(u-u_i)^2}}.$$

Pewna dowolność istnieje także przy wyborze ciągu $h(n)$. Jeśli wybrać go zgodnie ze wzorem

$$h(n) = c^2 n^{-a},$$

to a musi spełniać nierówność

$$0 < a < \tfrac{1}{2}.$$

5. Zakończenie

Przedstawiony w pracy sposób identyfikacji pozwala otrzymać ciąg charakterystyk modeli, który jest zbieżny do funkcji regresji I rodzaju. Wykorzystano w tym celu metody nieparametrycznej estymacji gęstości prawdopodobieństwa [6]. Jedynym założeniem, jakie czyni się o badanym obiekcie, jest warunek (4), który dla każdego przemysłowego obiektu jest spełniony z uwagi na ograniczone wyjście.

Nonparametric Identification of Static Plants

In the paper the nonparametric method for a static plant identification is presented. The unknown regression function is estimated with a formula

$$\Phi_n'(u) = \frac{1}{nh(n)f_u(u)} \sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)$$

if the density function $f(n)$ of the input is known and with an expression

$$\Phi_n''(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{u} K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}$$

if the density $f_u(u)$ is unknown; u_i and y_i are observed input and output values. It is proved that if the sequence $h(n)$ and the function $K(u)$ are suitably chosen then $\Phi_n'(u)$ and $\Phi_n''(u)$ converge to the regression function $E(y/u)$ as n increases.

Непараметрическая идентификация статичных объектов

В работе описывается непараметрический метод восстановления характеристики случайного преобразователя. Неизвестная функция регрессии оценивается следующим выражением:

$$\Phi_n'(u) = \frac{1}{nh(n)f_n(u)} \sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)$$

в случае, когда плотность распределения $f_n(u)$ входного сигнала известна и при помощи формулы

$$\Phi_n''(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{u-u_i}{h(n)}\right)}$$

если плотность $f_n(u)$ неизвестна, u_i и y_i наблюдаемые сигналы на входе и выходе. Доказано, что если последовательность $h(n)$ и функция $K(u)$ выбраны соответствующим образом, то $\Phi_n'(u) и \Phi_n''(u)$ сходятся с функцией регрессии $E(y/u)$ при возрастающем n.

Literatura

[1] Z. Bubnicki, *Metody aproksymacyjne w identyfikacji obiektów, Modele matematyczne i identyfikacja obiektów*, Wyd. Ossolineum, Wrocław 1972.

[2] Z. Bubnicki, *System Identification via Estimation of Probability Distribution and Moments*, 2nd IFAC Symposium on Identification, Prague 1970.

[3] J. Z. Cypkin, *Adaptacia, obuczenie i samoobuczenie w awtomaticzeskich sistemach*, Awtomatika i telemechanika, nr 1, 1966.

[4] W. Greblicki, *Zastosowanie metod określania empirycznych rozkładów prawdopodobieństwa w identyfikacji obiektów. Modele matematyczne i identyfikacja obiektów*, Wyd. Ossolineum, Wrocław 1972.

[5] W. Greblicki, *Nieparametryczna identyfikacja obiektów statycznych*, Prace V KKA, Gdańsk 1971.

[6] E. Parzen, *On Estimation of Probability Density Function and Mode*, Ann. Math. Statist. vol. 32, 1962.

DR INŻ. W. GREBLICKI
INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ, POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
JANISZEWSKIEGO 11/17, 50-372 WROCŁAW, POLSKA