

Zadanie 1 Zweryfikować następujące własności transformacji Laplace'a

- a) $\frac{d}{dt}f(t) \hat{=} sF(s) - f(0-),$
 b) $\int_0^t f(\tau)d\tau \hat{=} \frac{1}{s}F(s),$
 c) $tf(t) \hat{=} -\frac{d}{ds}F(s),$
 d) $e^{at}f(t) \hat{=} F(s-a),$
 e) $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \hat{=} F(s)G(s),$
 przy czym $g(t) = 0$ i $f(t) = 0$ dla $t < 0,$
 f) $f(t-T) \hat{=} e^{-sT}F(s),$ gdzie $T \geq 0.$

Na podstawie definicji wyznaczyć transformatę impulsu Diraca, a następnie - korzystając z tych własności - wyznaczyć transformaty następujących funkcji: $1, t, t^n, e^{-at}, te^{at}, t^2e^{at}, \sin \omega t, \cos \omega t, \sin(\omega t + \varphi), e^{-at} \sin \omega t, t \sin \omega t, te^{-at} \sin \omega t,$ a także $\delta(t-T)$ i $1(t-T),$ gdzie $T \geq 0.$

Zadanie 2 Metodą rozkładu na ułamki proste wyznaczyć oryginały następujących transformat:

- a) $\frac{1}{(s+1)(s+2)},$
 b) $\frac{1}{(s+1)^2(s+2)},$
 c) $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)},$
 d) $\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s+2)}.$

Zadanie 3 Sprawdzić, że

- a) $\frac{b-a}{(s-a)(s-b)} \hat{=} e^{-at} + e^{-bt},$
 b) $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} \hat{=} 1 - \cos \omega t.$

Zadanie 4 Zakładając, że a) $\Delta > 0,$ b) $\Delta = 0,$ c) $\Delta < 0,$ gdzie $\Delta = 4p^2 - 4q,$ wyznaczyć i naszkicować oryginał transformaty

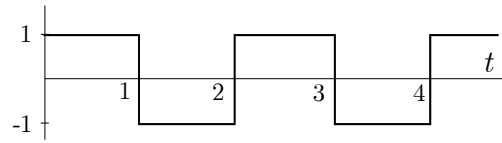
$$\frac{1}{s^2 + 2ps + q}.$$

Zadanie 5 Wykazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie $T,$ to

$$X(s) = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-sT}},$$

gdzie $X_T(s) = \int_0^T x(t)e^{-st}dt.$ Sprawdzić następnie, że transformata fali prostokątnej pokazanej na rys. 1 jest równa

$$\frac{(1 - e^{-s})^2}{2(1 - e^{-2s})}.$$



Rys. 1. Fala prostokątna

Zadanie 6 Rozwiązać równania różniczkowe:

- a) $y'' + 3y' + y = 0,$
 b) $y'' + 3y' + y = 1,$
 c) $y'' + 3y' + y = t,$
 d) $y'' + 3y' + y = \sin \omega t,$
 e) $y'' + y' - 2y = 0,$
 f) $y'' + y' - 2y = 1.$

Zadanie 7 Wyznaczyć $e^{\mathbf{A}t},$ jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 8 Równanie różniczkowe ma postać:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Sprawdzić, że jeśli

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix},$$

to

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t),$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

a następnie wyznaczyć $\boldsymbol{\xi}(t)$ oraz $y(t).$