1 Definicja stabilności

Omówimy teraz pojęcie stabilności systemu o transmitancji

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \tag{1.1}$$

rys. 1.1, gdzie

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{1.2}$$

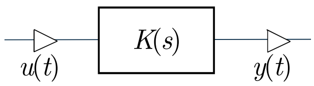
jest wielomianem charakterystycznym. Jego pierwiastki, czyli pierwiastki równania charakterystycznego $M(s) = 0$, oznaczymy jako

$$s_1, s_2, \ldots, s_m.$$

Są to tzw. bieguny transmitancji. Wielomian ten możemy zatem zapisać w postaci

$$M(s) = a_m(s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_m). \tag{1.3}$$

$L(s)$ także jest wielomianem, ale jego postać nie jest istotna dla naszych rozważań.



Rys. 1.1: System o transmitancji $K(s)$.

Zauważmy, że $(u = 0, y = 0)$ jest punktem równowagi, ponieważ gdy system się w nim znajdzie, to go nie opuści. Jeśli po wytrąceniu z tego punktu, ma on tendencję do powrotu, będziemy nazywać go stabilnym. Własność tę wyrazimy w formie definicji. Można powiedzieć, że rolę sprawcy tego wytrącenia odgrywa w niej warunek początkowy.

Definicja 1.1 *Niech $u(t) = 0$ dla wszystkich $t \geq 0$. Jeśli*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \tag{1.4}$$

dla każdego warunku początkowego

$$y(0_-), y'(0_-), \ldots, y^{(m-1)}(0_-),$$

to system nazywamy stabilnym.

Zbadamy teraz związek stabilności z transmitancją.

Twierdzenie 1.1 *System (1.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \operatorname{Re} s_2 < 0, \ldots, \operatorname{Re} s_m < 0. \tag{1.5}$$

Dowód. Przy zerowym pobudzeniu, sygnał wyjściowy jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$a_m y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0.$$

Jak wiemy[1], jego obustronna transformacja Laplace'a prowadzi do równości $M(s)Y(s) - W_{m-1}(s) = 0$, gdzie $W_{m-1}(s)$ jest wielomianem stopnia $m-1$ pochodzącym od warunku początkowego. Zatem $Y(s) = W_{m-1}(s)/M(s)$, skąd - przy założeniu, że bieguny są jednokrotne - wynika następujący rozkład na ułamki proste:

$$Y(s) = \frac{W_{m-1}(s)}{M(s)} = \frac{\alpha_1}{s - s_1} + \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s - s_m},$$

gdzie współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ zależą od warunku początkowego. Ostatecznie

$$y(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t} + \cdots + \alpha_m e^{s_m t}.$$

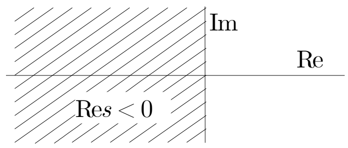
Załóżmy, że zestaw nierówności (1.5) jest spełniony. Jeśli zatem biegun s_1 jest rzeczywisty, to $s_1 < 0$ i składowa $e^{s_1 t}$ zdąża do zera, gdy $t \to \infty$. Składowa pochodząca od pary biegunów zespolonych – a zatem sprzężonych – ($s_1 = \sigma_1 + j\omega_1, s_2 = \overline{s}_1 = \sigma_1 - j\omega_1$) ma kształt $e^{\sigma_1 t}\sin\omega_1 t$ i także zanika do zera, bowiem $\sigma_1 < 0$.

Ponieważ argumenty powyższe mają zastosowanie wobec wszystkich biegunów, zatem (1.5) implikuje (1.4), co oznacza, że system jest stabilny. Jeśli natomiast wspomniany biegun lub ich para są np. dwukrotne, to na wyjściu pojawia się dodatkowa składowa o postaci $te^{s_1 t}$ lub $te^{\sigma_1 t}\cos\omega_1 t$, co nie zmienia istoty powyższej analizy.

Pozostaje więc wykazać, że stabilność, tzn. zbieżność (1.4) dla każdego warunku początkowego, implikuje (1.5). Można w tym celu pokazać, że dla każdego rzeczywistego s_1 istnieje warunek początkowy, dla którego $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. W konsekwencji, $y(t) = e^{s_1 t}$. Jeśli więc zachodzi (1.4), to $s_1 < 0$. Podobnie dla pary biegunów zespolonych jak wyżej istnieje warunek początkowy taki, że $y(t) = e^{\sigma_1 t}\sin\omega_1 t$. Ze zbieżności (1.4) wynika zatem $\sigma_1 = \operatorname{Re} s_1 = \operatorname{Re} s_2 < 0$.

Ze względu na to, że argumentacja ta jest prawdziwa dla każdego bieguna rzeczywistego i każdej pary biegunów zespolonych, stabilność implikuje (1.5). ☐

Uwaga 1.1 *Płaszczyznę liczb zespolonych można podzielić na trzy części, a mianowicie: lewą półpłaszczyznę, oś liczb urojonych i prawą półpłaszczyznę. Jeśli zatem zestaw nierówności (1.5) jest spełniony, to wszystkie bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie, co ilustruje rys. 1.2. System jest zatem stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego bieguny leżą w lewej półpłaszczyźnie.*



Rys. 1.2: Lewa półpłaszczyzna.

2 Własności systemów stabilnych

Aby głębiej zbadać różnicę pomiędzy systemami stabilnymi i niestabilnymi, zbadamy ich reakcję na pobudzenia standardowe, tzn. impuls Diraca, skok jednostkowy oraz sinusoidę. Warunek początkowy będzie przy tym zerowy.

Zaczniemy od odpowiedzi impulsowej, czyli reakcji na impuls Diraca $\delta(t)$.

Własność 2.1 (odpowiedź impulsowa $k(t)$) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0. \tag{2.1}$$

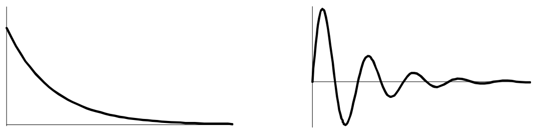
[1] patrz 4. SYSTEMY DYNAMICZNE, § 4.

Dowód. Ponieważ $k(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{K(s)\}$, zatem – przy założeniu, że bieguny są jednokrotne oraz $l < m$ – rozkład na ułamki proste doprowadza do relacji

$$k(t) \mathrel{\widehat{=}} K(s) = \frac{\alpha_1}{s - s_1} + \frac{\alpha_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s - s_m},$$

skąd wynika, że $k(t) = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t} + \cdots + \alpha_m e^{s_m t}$. Jest więc oczywiste, że z (1.5) wynika (2.1) i, na odwrót, (2.1) implikuje (1.5). Uogólnienie na przypadek biegunów wielokrotnych i $l \geq m$ jest łatwe, co kończy dowód. □

Przykładowe odpowiedzi impulsowe systemów stabilnych pokazano na rys. 2.3.



Rys. 2.3: Przykładowe odpowiedzi impulsowe $k(t)$ systemów stabilnych.

Własność 2.2 (odpowiedź skokowa $\lambda(t)$) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica*

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t). \tag{2.2}$$

Dowód. Ponieważ $\lambda(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{K(s)/s\}$, zatem, przy założeniu, że bieguny są jednokrotne oraz $l < m$,

$$\lambda(t) \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{s}K(s) = \frac{\beta_0}{s} + \frac{\beta_1}{s - s_1} + \frac{\beta_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{\beta_m}{s - s_m}, \tag{2.3}$$

a więc $\lambda(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{s_1 t} + \beta_2 e^{s_2 t} + \cdots + \beta_m e^{s_m t}$. Relacje (1.5) i (2.2) są zatem równoważne. Uogólnienie na przypadek dowolnych biegunów i $l \geq m$ jest oczywiste, co kończy dowód. □

Granicą, na której odpowiedź skokowa się ustala jest $\beta_0 = K(0)$, co zapisujemy jako

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = K(s)|_{s=0} = K(0).$$

Liczbę $K(0)$ nazywa sie wzmocnieniem w stanie ustalonym.

Rys. 2.4 przedstawia przykłady odpowiedzi skokowych systemów stabilnych.

Rys. 2.4: Przykładowe odpowiedzi skokowe $\lambda(t)$ systemów stabilnych.

Przykład 2.1 *System* $(2s + 3) / (s + 1)(s + 2)(s + 3)$ *jest stabilny i jego wzmocnienie w stanie ustalonym wynosi* $3/(1 \times 2 \times 3) = 1/2$.

Przykład 2.2 *System* $s/(s + 1)(s + 2)$ *jest stabilny i jego wzmocnienie w stanie ustalonym wynosi* $0/(1 \times 2) = 0$.

Własność 2.3 (odpowiedź na sinusoidę) *Jeśli system jest stabilny, to odpowiedź na pobudzenie* $u(t) = \sin \omega t$ *ma postać*

$$y(t) = |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + p(t),$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ *i* $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$.

Dowód. Wystarczy odwołać się do wcześniejszych rozważań dotyczących transmitancji widmowej[2]. □

[2]patrz: 2. Systemy dynamiczne

Po odpowiednio długim czasie na wyjściu systemu stabilnego obserwujemy niemal jedynie składową ustaloną $|K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$, ponieważ składowa przejściowa $p(t)$ zanika. Składowa ustalona jest sinusoidą o tej samej częstotliwości co sygnał pobudzający i dlatego mówimy, że system liniowy nie wprowadza zniekształceń częstotliwościowych.

3 Kryteria stabilności

Bezpośrednie wykorzystanie Twierdzenia 1.1 wymaga rozwiązania równania charakterystycznego. Niestety, dla $m > 4$, poza szczególnymi przypadkami, nie jest to możliwe. Z tego też powodu opracowano metody nazywane kryteriami, w których nie rozwiązuje się tego równania. Poznamy kilka z nich. We wszystkich zakładamy, że

$$a_m > 0.$$

3.1 Twierdzenie o znakach współczynników

Twierdzenie 3.1 (znak współczynników) *Jeśli system jest stabilny, to*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_{m-1} > 0. \tag{3.1}$$

Dowód. Załóżmy, że system jest stabilny. Jeśli zatem np. biegun s_1 jest rzeczywisty, to, na mocy Twierdzenia 1.1, $s_1 < 0$, skąd wynika, że wielomian $s - s_1$ ma obydwa współczynniki, czyli 1 i $(-s_1)$, dodatnie.

Dla pary biegunów zespolonych $(s_1 = \sigma + j\omega, s_2 = \sigma - j\omega), \sigma < 0$, natomiast, $(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - 2\sigma s + \left(\sigma^2 + \omega^2\right)$, skąd wynika, że wszystkie współczynniki powyższego dwumianu, czyli 1, (-2σ) i $(\sigma^2 + \omega^2)$, są także dodatnie.

Zatem wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego (1.3) są także dodatnie. □

Aby twierdzenie powyższe miało charakter użyteczny należy je sformułować w nieco innej, aczkolwiek równoważnej, postaci, jako Wniosek 3.1 podany poniżej. Jest on równoważny Twierdzeniu 3.1, ponieważ równoważne są implikacje "*Jeśli A, to B*" i "*Jeśli nie B, to nie A*".

Wniosek 3.1 (znak współczynników) *Jeśli zestaw nierówności (3.1) nie jest spełniony, to system nie jest stabilny.*

Wniosek powyższy oznacza, że (3.1) jest koniecznym warunkiem stabilności. Brak jego spełnienia skutkuje bowiem wnioskiem o niestabilności, a polega on na tym, że przynajmniej dwa współczynniki wielomanu charakterystycznego są różnych znaków lub przynajmniej jeden jest równy zero. Orzeka on nie tyle o stabilności, lecz raczej o jej braku, czyli niestabilności. Ponieważ jedyną możliwą konkluzją jest brak stabilności, to można powiedzieć, że jest to kryterium niestabilności.

Przykład 3.1 *Dla systemu* $(2s + 3) / \left(5s^3 + 4s^2 - 2s + 7\right)$, *zestaw nierówności (3.1) nie jest spełniony, ponieważ* $a_1 = -2 < 0$. *Dla systemu* $(2s - 5) / \left(6s^4 + 4s^2 + 3s + 9\right)$, *zestaw ten też nie jest spełniony, ponieważ* $a_3 = 0$. *Obydwa nie są zatem stabilne.*

Przykład 3.2 *Dla systemu* $(s - 8) / \left(s^2 + 4s + 7\right)$, *zestaw nierówności (3.1) jest spełniony. Twiedzenie 3.1 i siłą rzeczy Wniosek 3.1 nie wypowiadają się zatem ani na temat stabilności ani niestabilności.*

3.2 Kryterium Routha-Hurwitza

Rezultat podany poniżej znany jest jako kryterium Routha-Hurwitza. Zaczniemy od macierzy Hurwitza i jej podmacierzy.

Dla przykładu, niech wielomian charakterystyczny ma postać:

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

Macierz Hurwitza $\mathbf{H}_4$ i jej podmacierze $\mathbf{H}_3$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_1$,wszystkie kwadratowe, są zdefiniowane jak poniżej:

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [a_3].$$

Zwróćmy uwagę na główną przekątną macierzy $\mathbf{H}_4$ oraz indeksy w poszczególnych kolumnach, które rosną przy poruszaniu się w dół. Macierz $\mathbf{H}_3$ powstaje przez wykreślenie ostatniej kolumny i ostatniego wiersza z macierzy $\mathbf{H}_4$, $\mathbf{H}_2$ przez wykreślenie ostatniej kolumny i ostatniego wiersza z macierzy $\mathbf{H}_3$ i wreszcie $\mathbf{H}_1$ w ten sam sposób z $\mathbf{H}_2$.

Interesować nas będą wyznaczniki tych macierzy, czyli wyznacznik Hurwitza i jego podwyznaczniki jak poniżej:

$$\Delta_4 = \det \mathbf{H}_4, \Delta_3 = \det \mathbf{H}_3, \Delta_2 = \det \mathbf{H}_2, \Delta_1 = \det \mathbf{H}_1.$$

Ogólnie, dla wielomianu jak w (1.2), macierz Hurwitza $\mathbf{H}_m$ o m wierszach i m kolumnach ma postać jak poniżej:

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \cdots & & \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \cdots & & \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & a_1 & 0 \\ & & & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Macierz

$$\mathbf{H}_{m-1} = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \cdots & \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \cdots & \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

otrzymuje się przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny w $\mathbf{H}_m$. Podobnie, wykreślając ostatni wiersz i ostatnią kolumnę w $\mathbf{H}_{m-1}$ otrzymuje się $\mathbf{H}_{m-2}$. Powtarzając tę procedurę, dochodzi się w końcu do $\mathbf{H}_1 = [a_{m-1}]$. Wyznaczniki tych macierzy, to

$$\Delta_m, \Delta_{m-1}, \ldots, \Delta_1.$$

Zauważmy w tym miejscu, że $\Delta_m = a_{m-1}\Delta_{m-1}$.

Dla ciągu liczbowego $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, przez $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ oznaczymy liczbę zmian znaku jego kolejnych elementów. Dla przykładu zatem: $V(3, 4, 5, 1, -2,) = 1$, $V(5, -2, 4) = 2$, $V(1, -3, 4, 1) = 2$, $V(2, 3, 5, -1) = 1$, $V(1, 5, 2, 3) = 0$.

Twierdzenie 3.2 (Routh–Hurwitz) *Jeśli*

$$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_m \neq 0, \tag{3.2}$$

to żaden z pierwiastków wielomianu $M(s)$ nie leży na osi $j\omega$ oraz

$$m_+ = V\left(a_m, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}\right).$$

Wniosek 3.2 (kryterium Routha-Hurwitza) *Jeśli*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_m > 0, \tag{3.3}$$

to system jest stabilny.

Wniosek 3.2 orzeka, że spełnienie warunku (3.3) wystarcza, aby system był stabilny.

Twierdzenie Routha–Hurwitza jest skutecznym narzędziem, gdy wyznacznik Hurwitza i wszystkie jego podwyznaczniki są różne od zera. Pozwala ono wówczas w sposób jednoznaczny określić, czy system jest stabilny czy nie. Pozwala ono ponadto wyznaczyć liczbę niestabilnych pierwiastków wielomianu położonych w prawej półpłaszczyźnie. Gdy jednak przynajmniej jeden z nich jest zerowy, to twierdzenie nie upoważnia do jakichkolwiek wniosków na temat stabilności.

Przykład 3.3 *Dla wielomianu charakterystycznego*

$$(s + 2)(s + 3)^2 = s^3 + 8s^2 + 21s + 18,$$

wyliczamy

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 0 \\ 1 & 21 & 0 \\ 0 & 8 & 18 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 1 & 21 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [8],$$

skąd wynika, że $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 150$, $\Delta_3 = 1200$. Ponieważ

$$m_+ = V\left(1, 8, \frac{150}{8}, \frac{1200}{150}\right) = 0,$$

wielomian ten ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie. System jest stabilny.

Przykład 3.4 *Niech teraz mianownikiem transmitancji będzie*

$$(s - 1)^2(s + 2)(s + 3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6.$$

Zatem

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = 3.$$

Zatem $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -40$, $\Delta_4 = -240$ i ostatecznie

$$m_+ = V\left(1, 3, -\frac{2}{3}, \frac{40}{2}, \frac{240}{40}\right) = 2.$$

Wielomian $M(s)$ nie ma więc żadnego pierwiastka na osi $j\omega$, dwa w prawej półpłaszczyźnie oraz dwa w lewej. System jest zatem niestabilny.

Przykład 3.5 *Dla transmitancji*

$$\frac{1}{(s^2+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3+3s^2+2s+6}$$

wyliczamy

$$\mathbf{H}_3 = \det\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [3],$$

skąd wynika $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 0$ *oraz* $\Delta_3 = 0$. *Ponieważ wśród wyznaczników znajduje się zerowy, zatem kryterium nie wypowiada się na temat stabilności systemu.*

3.3 Kryterium Hurwitza

Twierdzenie 3.3 (kryterium Hurwitza) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (3.3).*

Gdy przynajmniej jeden wyznacznik jest zerowy, kryterium Routha-Hurwitza pozostawia problem stabilności otwartym, nie prowadzi do żadnej konkluzji. Kryterium Hurwitza domyka sprawę, gdyż orzeka, że system jest wtedy niestabilny. O ile bowiem kryterium Routha-Hurwitza stanowi, że z (3.3) wynika stabilność, to kryterium Hurwitza dodaje do tego, że z braku spełnienia wynika niestabilność. Innymi słowy stanowi, że (3.3) jest nie tylko warunkiem wystarczającym ale także koniecznym, że jest on równoważny stabilności. Jeśli bowiem jest spełniony to system jest stabilny, jeśli nie to system jest niestabilny.

Podsumowując zatem, kryterium Huwitza, czyli Twierdzenie 3.3, jest skuteczniejszym narzędziem do badania stabilności niż kryterium Routha-Hurwitza, czyli Wniosek 3.2. Odpowiedzi na pytania o stabilność udziela bowiem zawsze, niezależnie od wartości wyznaczników. Twierdzenie Routha-Hurwitza 3.2 pozwala natomiast ustalić liczbę biegunów niestabilnych leżących w prawej półpłaszczyźnie, co poszerza możliwości stosowania w sposób skuteczny kryterium Nyquista, które poznamy później.

Przykład 3.6 *Dla systemu o transmitancji*

$$\frac{L(s)}{6s^3+13s^2+12s+4},$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \\ 0 & 13 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [13].$$

Zatem $\Delta_3 = 528$, $\Delta_2 = 150$, $\Delta_1 = 13$. *System jest stabilny.*

Przykład 3.7 *Dla* $M(s) = 8s^3 + 4s^2 + 2s + 1$ *wyliczamy*

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [4].$$

Ponieważ $\Delta_3 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 = 4$, *system jest niestabilny.*

Przykład 3.8 *Dla* $M(s) = 8s^3 + 3s^2 + 2s + 1$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1 = [3],$$

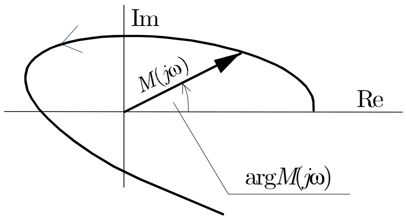
$\Delta_3 = -2$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_1 = 3$. *System nie jest stabilny.*

3.4 Kryterium Michajłowa

O ile poprzednie kryteria są natury numerycznej, to kryterium Michajłowa ma charakter częstotliwościowy. Na podstawie tzw. wykresu Michajłowa przedstawiającego $M(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$, rys. 3.5, bada się w nim funkcję

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= a_m(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\cdots(j\omega - s_m) \\ &= |M(j\omega)|e^{\arg M(j\omega)}. \end{aligned}$$

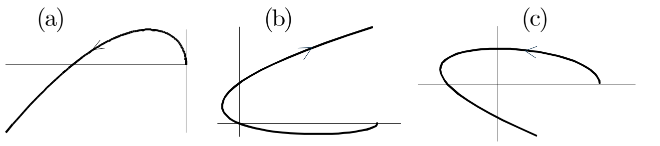
Zajmiemy się osobno modułem $|M(j\omega)|$ oraz osobno argumentem $\arg M(j\omega)$.



Rys. 3.5: Przykładowy wykres Michajłowa.

Dla wygody, przez m_-, m_0, m_+ oznaczymy liczbę biegunów odpowiednio w lewej półpłaszczyźnie, na osi liczb urojonych i w prawej półpłaszczyźnie. Jest przy tym oczywiste, że $m_- + m_0 + m_+ = m$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $m_0 = m_+ = 0$, tzn. gdy $m_- = m$.

Własność 3.1 *Równość* $m_0 = 0$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $|M(j\omega)| \neq 0$ *dla wszystkich* $\omega \in [0, \infty)$.



Rys. 3.6: Przykładowe wykresy Michajłowa.

Ilustracją jest rys. 3.6. W sytuacjach (a) i (b) wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych, przy czym w pierwszej zaczyna się w nim. W pierwszej zatem równanie $M(s) = 0$ ma pierwiastek $s = 0$, w drugiej parę rozwiązań urojonych. W obu przypadkach $m_0 > 0$, co oznacza, że system jest niestabilny.

W sytuacji (c) wykres nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, a zatem $m_0 = 0$. Sytuacja ta będzie przedmiotem dalszych rozważań. Zajmiemy się w nich argumentem funkcji $M(j\omega)$ i ustalimy czy $m_+ > 0$.

Wspomniany argument, czyli $\arg M(j\omega)$ zmienia się przy zmianie ω. Jego całkowity przyrost definiujemy jak poniżej:

$$\underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg M(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \arg M(j\omega) - \arg M(j0).$$

Własność 3.2 *Jeśli* $m_0 = 0$, *to*

$$\underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg M(j\omega) = (m_- - m_+)\frac{\pi}{2}. \tag{3.4}$$

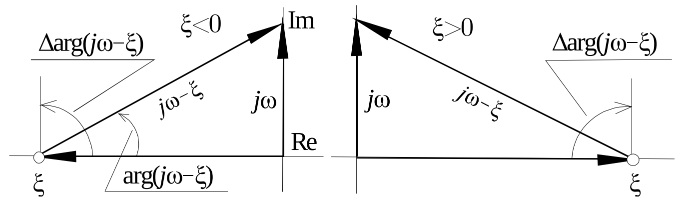
Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg M(j\omega) &= \underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg (j\omega - s_1) + \underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg (j\omega - s_2) \\ &+ \cdots + \underset{0\le\omega<\infty}{\Delta} \arg (j\omega - s_m). \end{aligned}$$

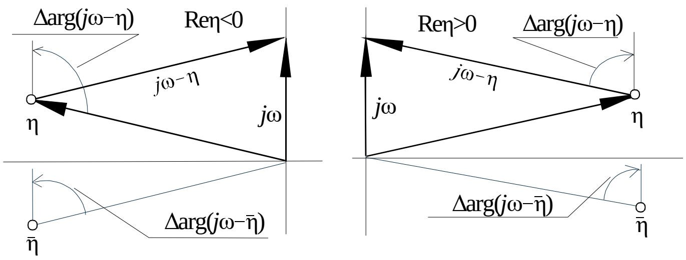
Jeśli pierwiastek ξ jest liczbą rzeczywistą i $\xi \neq 0$, to – jak to wynika z rys. 3.7 –

$$\Delta \underset{0\le\omega<\infty}{\arg} (j\omega - \xi) = \begin{cases} \pi/2 & \text{dla } \xi < 0, \\ -\pi/2, & \text{dla } \xi > 0. \end{cases}$$

Na rysunku tym wektor $j\omega - \xi$ pokazany jest z dokładnością do równoległego przesunięcia, które nie zmienia interesującego na kąta $\arg(j\omega - \xi)$.



Rys. 3.7: Pierwiastek $\xi \neq 0$ liczbą rzeczywistą.



Rys. 3.8: Para pierwiastków zespolonych $(\eta, \overline{\eta})$.

Dla pary liczb zespolonych $(\eta, \overline{\eta})$ takiej, że $\operatorname{Re}\eta \neq 0$ natomiast

$$\Delta \underset{0\le\omega<\infty}{\arg} (j\omega - \eta)(j\omega - \overline{\eta}) = \begin{cases} \pi, & \text{dla } \eta < 0, \\ -\pi, & \text{dla } \eta > 0, \end{cases}$$

patrz rys. 3.8, na którym wektory $j\omega - \eta$ i $j\omega - \overline{\eta}$ pokazane są z dokładnością do równoległego przesunięcia. W oczywisty sposób wynika stąd (3.4). □

Z Własności 3.1 i 3.2 oraz tego, że system jest stabilny wtedy i tyko wtedy, gdy $m_0 = m_+ = 0$, wynika kryterium Michajłowa.

Twierdzenie 3.4 (kryterium Michajłowa) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa poniższe warunki:*

$$|M(j\omega)| \neq 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in [0, \infty),$$

$$\Delta \underset{0\le\omega<\infty}{\arg} M(j\omega) = m\frac{\pi}{2}.$$

Kryterium podaje warunek stabilności, który jest równocześnie konieczny i wystarczający. Można je wyrazić w formie geometrycznej jak poniżej:

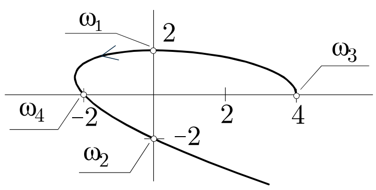
Wniosek 3.3 (kryterium Michajłowa) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres Michajłowa*

- *nie przechodzi przez początek układu współrzędnych oraz*
- *przechodzi kolejno przez m ćwiartek płaszczyzny w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.*

Przykład 3.9 *Dla* $M(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4$ *otrzymujemy* $M(j\omega) = \left(\omega^4 - 5\omega^2 + 4\right) + j(-\omega^3 + 3\omega)$. *Równanie* $\operatorname{Re} M(j\omega) = 0$ *ma zatem nieujemne rozwiązania:* $\omega_1 = 1$ *oraz* $\omega_2 = 2$. *Ponadto* $\operatorname{Im} M(j\omega_1) = 2$ *oraz* $\operatorname{Im} M(j\omega_2) = -2$. *Równanie* $\operatorname{Im} M(j\omega) = 0$ *ma także dwa nieujemne pierwiastki* $\omega_3 = 0$ *i* $\omega_4 = \sqrt{3}$, *dla których* $\operatorname{Re} M(j\omega_3) = 4$, $\operatorname{Re} M(j\omega_4) = -2$. *Na tej podstawie można sporządzić nstępującą tabelę:*

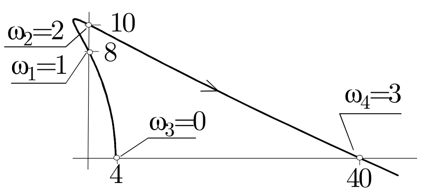
ω	$\operatorname{Re} M(j\omega)$	$\operatorname{Im} M(j\omega)$
$\omega_3 = 0$	4	0
$\omega_1 = 1$	0	2
$\omega_4 = \sqrt{3}$	-2	0
$\omega_2 = 2$	0	-2

w której pierwiastki $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ *są uszeregowane w rosnącej kolejności. Dzięki niej łatwo sporządzamy wykres Michajłowa, rys. 3.9. Na jego podstawie stwierdzamy, że* $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega) = 2\pi$. *Zatem system jest stabilny.*



Rys. 3.9: Wykres Michajłowa, Przykład 3.9.

Przykład 3.10 *Niech teraz* $M(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 9s + 4$. *Postępując jak w Przykładzie 3.9 dochodzimy do wykresu jak na rys. 3.10. Ponieważ* $\Delta \arg_{0\le\omega<\infty} M(j\omega) \neq 2\pi$, *więc system jest niestabilny.*



Rys. 3.10: Wykres Michajłowa, Przykład 3.10.

4 Podsumowanie

Kryterium Routha-Hurwitza, czyli Wniosek 3.2, stanowi, że zestaw nierówności (3.3) jest wystarczającym warunkiem stabilności. Jeśli jest on spelniony, to system jest stabilny.

Kryterium Hurwitza dodaje, że jest on także konieczny, czyli orzeka że jest to warunek jednocześnie wystarczający i konieczny. Spełnienie implikuje bowiem stabilność, a niespełnienie niestabilność.

Podobnie kryterium Michajłowa podaje warunek wystarczający i konieczny.

Warunek (3.1) w twierdzeniu o znaku współczynników jest natomiast konieczny, bowiem jego niespełnienie oznacza niestabilność.