

1 Transformacja Fouriera

Niech $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ będzie funkcją taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (1.1)$$

Jej transformatą Fouriera $\tilde{X}(\omega)$ nazywa się

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

a operację, która przeprowadza $x(t)$ w $\tilde{X}(\omega)$ – transformacją Fouriera. Odwrotna transformacja stwierdza, że

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Twierdzenie 1.1 (wzór Parsevala) *Jeśli funkcja $x(t)$ spełnia (1.1), to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Korzystając z definicji transformaty, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right) dt,$$

co, po zmianie kolejności całkowania, doprowadza do równości

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)\tilde{X}^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

i kończy dowód. \square

Jeśli ponadto $x(t) = 0$, dla $t < 0$, to funkcja $x(t)$ ma zarówno transformatę Fouriera $\tilde{X}(\omega)$ jak i Laplace'a $X(s)$, przy czym

$$\tilde{X}(\omega) = X(j\omega).$$

2 Procesy stochastyczne z czasem ciągłym

Definicja 2.1 *Rodzina $X(t)$, gdzie $t \in (-\infty, \infty)$, zmiennych losowych takich, że $EX^2(t) < \infty$ dla każdego t nazywa się procesem stochastycznym drugiego rzędu.*

Badamy procesy, które są ponadto stacjonarne, tzn. takie, w których wszystkie rozkłady prawdopodobieństwa nie zmieniają się w czasie, tzn. przy przesunięciu na osi czasu. Ponadto, w dalszych rozważaniach zakładamy, że wartość średnia procesu jest zerowa. Dla prostoty będziemy niekiedy pisać X zamiast $X(t)$.

2.1 Funkcja korelacji, gęstość widmowa

Dla stacjonarnego procesu drugiego rzędu definiuje się następującą funkcję korelacji:

$$R(\tau) = E\{X(\tau)X(t+\tau)\}.$$

Własność 2.1 *Funkcja korelacji ma następujące własności:*

- (a) $R(\tau) = R(-\tau)$ (parzystość),
- (b) $R(0) = EX^2 = E^2X + \text{var}[X]$,
- (c) $|R(\tau)| \leq R(0)$,
- (d) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = E^2X$.

Dowód. Własności (a) i (b) są oczywiste, natomiast (c) wynika z następującej nierówności:

$$\begin{aligned} R^2(\tau) &= E^2\{X(t)X(t+\tau)\} \leq EX^2(t)EX^2(t+\tau) \\ &= E^2X^2 = R^2(0), \end{aligned}$$

która z kolei wynika z nierówności Schwartza. Punkt (d), który pozostawimy bez dowodu, oznacza, że korelacja pomiędzy zmiennymi losowymi maleje do zera, gdy odległość czasowa między rośnie do nieskończoności. \square

Definiujemy teraz funkcję gęstości widmowej

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

która jest transformatą Fouriera funkcji korelacji. Zatem

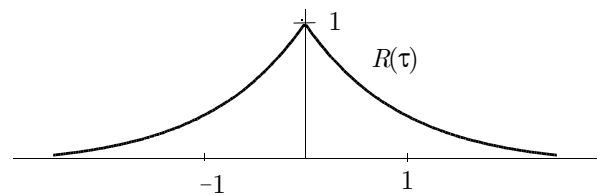
$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.1)$$

Z (2.1) wynika, że $R(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$, co, po uwzględnieniu (b) we Własności 2.1, doprowadza do równości

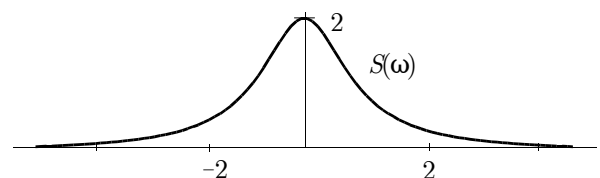
$$EX^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (2.2)$$

Interpretując EX^2 jako moc sygnału zauważamy więc, że jest ona proporcjonalna do całki z gęstości widmowej.

Przykład 2.1 *Jeśli $R(\tau) = e^{-|\tau|}$, $\alpha > 0$, to $S(\omega) = 2/(\omega^2 + 1)$, rys. 2.1 i 2.2.*



Rys. 2.1: Funkcja korelacji, Przykład 2.1.



Rys. 2.2: Gęstość widmowa, Przykład 2.1.

Uwaga 2.1 *Jeśli $Y(t) = X(t) + c$, to $R_Y(\tau) = R_X(\tau) + c^2$.*

Funkcją korelacji wzajemnej pomiędzy procesami $X(t)$ i $Y(t)$ nazywamy

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t+\tau)Y(t)\}.$$

Jej całka Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

nazywa się funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Zauważamy, że $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ i, siłą rzeczy, $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$.

Niech teraz $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Jak łatwo sprawdzić (pisząc R_X mamy na myśli funkcję procesu X itp.) ,

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega),$$

gdzie $R_X(\tau)$ i $R_Y(\tau)$ są funkcjami korelacji procesów $X(t)$ i $Y(t)$, natomiast $S_X(\omega)$ i $S_Y(\omega)$ ich gęstościami widmowymi. Jeśli procesy nie są skorelowane, tzn. jeśli $E\{X(t)Y(\tau)\} = EX(t)EY(\tau)$, to

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

2.2 Biały szum

Jeśli

$$R(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau),$$

to mówimy, że proces $X(t)$ jest białym szumem. Dla $\tau \neq 0$, $R(\tau) = 0$, skąd wynika $E\{X(\tau)X(\tau+t)\} = 0$, co oznacza, że zmienne losowe $X(\tau)$ i $X(\tau+t)$ nie są skorelowane. Dla procesu takiego $S(\omega) = 2\pi\sigma^2$, a zatem $EX^2 = \infty$. Moc białego szumu jest zatem nieskończona. Nie jest to więc proces fizyczny, lecz jedynie wygodna abstrakcja.

3 Sygnały losowe w systemach ciągłych

Zakładamy teraz, że stabilny system o transmitancji $K(s) = L(s)/M(s)$, $l < m$, rys. 3.1, pobudzany jest białym szumem $U(t)$ o funkcji korelacji

$$R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau). \quad (3.1)$$

Wyjście systemu w chwili t jest zatem określone przez splot

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t k(t-\tau)U(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)U(t-\tau)d\tau,$$

gdzie $k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$. Zatem

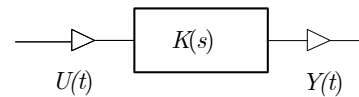
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)U(t-\tau)e^{-j\omega t} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau \\ &= K(j\omega)\tilde{U}(\omega), \end{aligned}$$

co oznacza, że

$$\tilde{Y}(\omega) = K(j\omega)\tilde{U}(\omega),$$

gdzie $\tilde{Y}(\omega)$ i $\tilde{U}(\omega)$ są transformacjami Fouriera odpowiednio sygnałów na wyjściu i wejściu systemu.

Własności stacjonarnego procesu stochastycznego $Y(t)$, czyli sygnału na wyjściu systemu, są podane poniżej:



Rys. 3.1: System o losowym sygnale wejściowym.

Własność 3.1 Jeśli sygnał wejściowy jest białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji (3.1), to

- (α) $EY = 0, EY^2 = \sigma_U^2 \int_0^{\infty} k^2(\xi)d\xi$,
- (β) $R_Y(\tau) = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\xi+\tau)d\xi$,
- (γ) $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$,
- (δ) $EY^2 = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega$,
- (ε) $R_{YU}(\tau) = \sigma_U^2 k(\tau)$.

Dowód. Aby wykazać (β) zauważmy, że

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= EY(t)Y(t+\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t+\tau-\xi)k(t-\eta)E\{U(\xi)U(\eta)\} d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t+\tau-\xi)k(t-\eta)\delta(\xi-\eta)d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(t+\tau)k(t)dt. \end{aligned}$$

Zatem

$$EY^2 = R_Y(0) = \sigma_U^2 \int_0^{\infty} k^2(\tau)dt$$

patrz Własność 2.1 (punkt (b)), skąd wynika (α).

Wyliczając transformację Fouriera funkcji korelacji, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi+\tau)k(\xi)e^{-j\omega\tau} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi+\tau)e^{j\omega(\xi-\tau)}k(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{j\omega\xi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi+\tau)e^{-j\omega(\xi+\tau)} d\tau \right] d\xi \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{j\omega\eta} d\eta \\ &= \sigma_U^2 \tilde{K}(\omega)\tilde{K}(-\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{K}(\omega)$ jest transformacją Fouriera odpowiedzi impulsowej $k(t)$. Ponieważ $\tilde{K}(\omega) = K(j\omega)$, gdzie $K(s)$ jest jej transformacją Laplace'a, oraz $\tilde{K}(-\omega) = K(-j\omega) = K^*(j\omega)$, zatem $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$, co oznacza, że (γ) jest prawdziwe.

Z (γ) i

$$EY^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega$$

wynika (δ). Na koniec zauważmy, że

$$\begin{aligned} R_{YU}(\tau) &= E\{Y(t+\tau)U(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)E\{U(t+\tau-\xi)U(t)\}d\xi \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\delta(\xi-\tau)d\xi = \sigma_U^2 k(\tau), \end{aligned}$$

co oznacza, że (ε) jest prawdziwe. \square

Przykład 3.1 Niech $U(t)$ będzie białym szumem o funkcji korelacji $\delta(\tau)$ i niech $K(s) = 1/(s+1)$. Ponieważ $k(t) = e^{-t}$ dla $t \geq 0$, a zatem $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$, rys. 2.1, $S_Y(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$, rys. 2.2. Ponadto $EY(t) = 0$, $EY^2(t) = 1/2$ oraz $R_{YU}(\tau) = e^{-\tau}$.

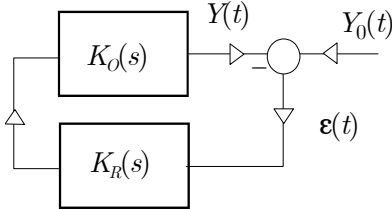
4 Regulacja automatyczna

Zbadamy teraz zachowanie układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy działa nań sygnał o charakterze losowym. Rozpatrzmy dwie sytuacje, w których

- wartość zadana jest sygnałem losowym,
- deterministyczny sygnał wartości zadanej jest zakłócony szumem.

4.1 Wartość zadana procesem stochastycznym

W układzie automatycznej regulacji jak na rys. 4.1, sygnał wartości zadanej $Y_0(t)$ jest białym szumem o gęstości widmowej $S_{Y_0}(\omega) = \text{var}[Y_0]$.



Rys. 4.1: Układ automatycznej regulacji.

Zacniemy od przypomnienia, że jest transmitancją układu otwartego jest

$$K(s) = K_O(s)K_R(s),$$

i że ma ona postać funkcji wymiernej

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}.$$

Ponadto

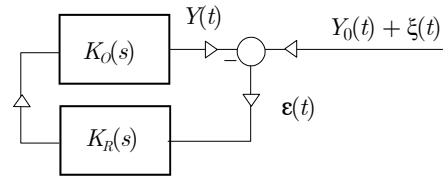
$$K_E(s) = \frac{E(s)}{Y_0(s)} = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}.$$

Z uwagi na to, że

$$S_E(\omega) = \text{var}[Y_0]|K_E(j\omega)|^2,$$

patrz Własność 3.1 (punkt (γ)), zatem, na mocy (δ),

$$\begin{aligned} E\varepsilon^2(t) &= \frac{1}{2\pi} \text{var}[Y_0] \int_{-\infty}^{\infty} |K_E(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{var}[Y_0] \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega. \end{aligned}$$



Rys. 4.2: Układ automatycznej regulacji. Zaszumiony sygnał wartości zadanej.

Ponieważ zwykle jest tak, że $l < m$, więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega = \infty,$$

bowiem stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku ją takie same. Zatem $E\varepsilon^2(t) = \infty$, skąd wynika, że białego szumu nie można skutecznie śledzić.

4.2 Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera deterministyczny sygnał zadany $Y_0(t)$ zakłócony białym szumem $\xi(t)$, co przedstawia rys. 4.2. O jakości systemu świadczy teraz nie realny sygnał $\varepsilon(t) = Y_0(t) + \xi(t) - Y(t)$, lecz $e(t) = Y_0(t) - Y(t)$.

Ponieważ $e(t) = \varepsilon(t) - \xi(t)$, a zatem

$$\mathfrak{L}\{e(t)\} = \mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} - \mathfrak{L}\{\xi(t)\},$$

co po uwzględnieniu relacji

$$\mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} = K_E(s)[Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}],$$

proceedzi do równości

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{e(t)\} &= K_E(s)[Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}] - \mathfrak{L}\{\xi(t)\} \\ &= K_E(s)Y_0(s) + [K_E(s) - 1]\mathfrak{L}\{\xi(t)\}. \end{aligned}$$

Wynika z niej, że

$$e(t) = e_d(t) + e_\xi(t),$$

gdzie

$$\mathfrak{L}\{e_d(t)\} = K_E(s)Y_0(s)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{e_\xi(t)\} &= [K_E(s) - 1]\mathfrak{L}\{\xi(t)\} \\ &= \frac{-L(s)}{L(s) + M(s)}\mathfrak{L}\{\xi(t)\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Błąd $e(t)$ zawiera więc dwie składowe, a mianowicie składową deterministyczną $e_d(t)$ pochodzącą od $Y_0(t)$ oraz losową $e_\xi(t)$, której przyczyną jest szum $\xi(t)$. Składowa $e_d(t)$ była już wcześniej przedmiotem naszej analizy w ramach przedmiotu Podstawy Automatyki i w związku z tym jej analizę pominiemy.

Teraz zbadamy losową składową $e_\xi(t)$ błędu pochodzącą od szumu. Z Własności 3.1 (punkt (γ)) i (4.1) wynika, że

$$S_{e_\xi}(\omega) = \sigma_\xi^2 \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2,$$

co na mocy punktu (δ) tejsze Własności doprowadza do wniosku, że

$$Ee_{\xi}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \sigma_{\xi}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Gdy system jest taki, że $l < m$, wówczas całka w powyższym wyrażeniu jest skończona (różnica pomiędzy stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku jest bowiem nie mniejsza niż 2). Można wtedy skutecznie regulować w obecności białego szumu $\xi(t)$.

5 Identyfikacja systemu

Dla systemu jak na rys. 3.1 pobudzanego białym szumem

$$\begin{aligned} EY(t + \tau)U(t) &= EY(\tau)U(0) \\ &= E \int_{-\infty}^{\tau} k(\tau - \xi)U(\xi)d\xi U(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} k(\tau - \xi)E\{U(\xi)U(0)\}d\xi \\ &= EU^2 \int_{-\infty}^{\tau} k(\tau - \xi)\delta(\xi)d\xi = EU^2 k(\tau), \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$k(\tau) = \frac{EY(t + \tau)U(t)}{EU^2(t)}.$$

Dysponując zatem obserwacjami

$$(U(t), Y(t)), t \in [0, T],$$

poczynionymi na wejściu i wyjściu systemu, można skonstruować algorytm wykrywania odpowiedzi impulsowej w postaci:

$$\hat{k}(t) = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T Y(t + \tau)U(\tau)d\tau}{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(\tau)d\tau},$$

czyli algorytm identyfikacji systemu. Można wykazać, że jego licznik i mianownik zbiegają się odpowiednio do $EY(t + \tau)U(t)$ i EU^2 , gdy horyzont obserwacji T narasta do nieskończoności.