

Teoretyczne podstawy automatyki

Włodzimierz Greblicki

Wrocław 2001

Podręcznik przeznaczony jest dla studentów i pracowników wyższych uczelni technicznych.

Opiniodawca
Leszek RUTKOWSKI

Opracowanie redakcyjne i korekta
Aleksandra WAWRZYŃKOWSKA

© Copyright by Włodzimierz Greblicki, Wrocław 2001

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN

Nakład . Ark. wyd. . Ark. druk. . Papier offset .
Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr .

Spis rzeczy

1	Wstęp	9
2	Opisy liniowych systemów dynamicznych	11
2.1	Wprowadzenie	11
2.2	Równanie różniczkowe	12
2.2.1	Liniowe równanie różniczkowe	12
2.2.2	Równanie liniowe jako rezultat linearyzacji	15
2.2.3	Proces, system, opis	17
2.3	Transmitancja	19
2.3.1	Definicja. Liniowość systemu	19
2.3.2	Transmitancja systemów złożonych	20
2.4	Odpowiedzi na standardowe pobudzenia	22
2.4.1	Odpowiedź impulsowa	22
2.4.2	Odpowiedź skokowa	25
2.4.3	Odpowiedzi systemu a bieguny transmitancji	28
2.5	Transmitancja widmowa	30
2.5.1	Definicja	30
2.5.2	Charakterystyki częstotliwościowe	31
2.6	Splot	32
2.7	Równanie fazowe	33
2.8	Wektorowe równanie różniczkowe	35
2.9	Związki między opisami	41
2.10	Uwagi końcowe	41
3	Człony dynamiczne	43
3.1	Człon proporcjonalny	43
3.2	Człon inercyjny	44
3.3	Człon oscylacyjny	48

3.4	Człony całkujące	49
3.5	Człony różniczkujące	52
3.6	Przybliżone charakterystyki logarytmiczne	54
4	Stabilność	57
4.1	Definicja	57
4.2	Twierdzenie o stabilności	58
4.3	Własności systemów stabilnych	61
4.3.1	Odpowiedź impulsowa	61
4.3.2	Odpowiedź skokowa	63
4.3.3	Transmitancja widmowa	64
4.3.4	Równanie fazowe	68
4.3.5	Ograniczone wejście – ograniczone wyjście	69
4.4	Własności systemów niestabilnych	72
5	Kryteria stabilności	73
5.1	Systemy o dowolnej strukturze	74
5.1.1	Twierdzenie o współczynnikach	74
5.1.2	Kryterium Routha–Hurwitza	75
5.1.3	Kryterium Hurwitza	78
5.1.4	Kryterium Michajłowa	81
5.2	Systemy ze sprzężeniem zwrotnym	87
5.2.1	Wstęp	87
5.2.2	Kryterium Nyquista	90
6	Regulacja automatyczna	99
6.1	Wstęp	99
6.2	Wymagania	101
6.3	Regulacja statyczna, czyli P	103
6.3.1	Własności	103
6.3.2	Regulacja z obiektem inercyjnym	105
6.4	Regulacja astatyczna	107
6.4.1	Własności	107
6.4.2	Regulacja I	108
6.4.3	Regulacja PI	110
6.4.4	Regulacja PID	112
6.5	Inne sygnały wartości zadanej	114

7	Sygnaly losowe w systemach ciągłych	117
7.1	Wprowadzenie	117
7.2	System pobudzany białym szumem	118
7.3	System przy pobudzeniu skorelowanym	122
7.4	Regulacja w obecności sygnału losowego	124
8	Opisy systemów dyskretnych	129
8.1	Równanie różnicowe	129
8.2	Transmitancja	132
8.2.1	Definicja. Liniowość systemu	132
8.2.2	Systemy z opóźnieniem	133
8.2.3	Transmitancja systemów złożonych	134
8.3	Transmitancja widmowa	135
8.4	Odpowiedzi na standardowe pobudzenia	136
8.4.1	Odpowiedź impulsowa	136
8.4.2	Odpowiedź skokowa	140
8.5	Splot dyskretny	142
8.6	Równanie fazowe	142
8.7	Wektorowe równanie różnicowe	144
8.8	Związki między opisami	150
9	Stabilność systemów dyskretnych	151
9.1	Definicja	151
9.2	Twierdzenie o stabilności	152
9.3	Własności systemów stabilnych	155
9.3.1	Odpowiedź impulsowa i skokowa	155
9.3.2	Transmitancja widmowa	156
9.3.3	Równanie fazowe	158
9.3.4	Ograniczone wejście – ograniczone wyjście	159
9.4	Własności systemów niestabilnych	160
10	Kryteria stabilności systemów dyskretnych	161
10.1	Przekształcenie półpłaszczyzny w koło	162
10.2	Kryterium Jury’ego	167
10.3	Kryterium Michajłowa	169
10.4	Kryterium Nyquista	173

11 Dyskretna regulacja automatyczna	179
11.1 System automatycznej regulacji	179
11.2 Regulacja statyczna, czyli P	180
11.3 Regulacja astatyczna	181
11.3.1 Regulacja I	181
11.3.2 Regulacja PI	182
11.4 Obiekt ciągle sterowany dyskretnie	183
11.4.1 Impulsator w systemie ciągłym	183
11.4.2 Obiekt ciągle sterowany przez impulsator	185
11.4.3 Obiekt ciągły, impulsator i ekstrapolator	187
11.4.4 Układy automatycznej regulacji	188
12 Sygnały losowe w systemach dyskretnych	191
12.1 Wprowadzenie	191
12.2 System pobudzany białym szumem	191
12.3 System przy pobudzeniu skorelowanym	193
12.4 Regulacja w obecności sygnału losowego	194
12.4.1 Wartość zadana procesem stochastycznym	195
12.4.2 Zaszumiony sygnał wartości zadanej	196
Dodatek A Transformacja Laplace'a	197
A.1 Definicja i własności	197
A.1.1 Definicja	197
A.1.2 Transformaty wybranych funkcji	200
A.1.3 Funkcje określone na całej osi czasu	203
A.2 Rozkład na ułamki proste, funkcja oryginalna	208
A.2.1 Rozkład na ułamki proste	208
A.2.2 Twierdzenia o funkcji oryginalnej	213
A.3 Własności graniczne	219
A.4 Równanie różniczkowe	223
A.5 Funkcja e^{At}	224
A.6 Transformacja Fouriera	227
Dodatek B Transformacja \mathcal{Z}	231
B.1 Definicja i własności	231
B.1.1 Definicja	231
B.1.2 Ciągi określone na całej osi czasu	234
B.1.3 Transformaty wybranych ciągów	235
B.2 Oryginały funkcji wymiernych	237

B.3	Własności graniczne	240
B.4	Dyskretna transformacja Fouriera	243
B.5	Równanie różnicowe	245
B.6	Transformacja \mathcal{Z} , a transformacja Laplace'a	248
Dodatek C Procesy stochastyczne drugiego rzędu		249
C.1	Procesy z czasem ciągłym	249
C.1.1	Funkcja korelacji, gęstość widmowa	249
C.1.2	Biały szum	251
C.1.3	Całka i pochodna procesu	252
C.2	Procesy z czasem dyskretnym	253
Dodatek D Tablice transformat		255
D.1	Transformacja Laplace'a	256
D.2	Transformacja \mathcal{Z}	258
Literatura		261
Indeks		262

Rozdział 1

Wstęp

Książka niniejsza składa się z części zasadniczej, trzech obszernych dodatków oraz tablic transformat. Rozdziały 2–7 poświęcone są systemom ciągłym, natomiast rozdziały 8–12 systemom z czasem dyskretnym. Przedstawiono w nich różne sposoby opisu własności liniowych systemów dynamicznych, a mianowicie: równanie różniczkowe i różnicowe, splot, transmitancję, transmitancję widmową oraz charakterystyki częstotliwościowe. Omówiono także odpowiedzi na standardowe wymuszenia: impuls Diraca, skok jednostkowy i sinusoidę. Dużo uwagi poświęcono stabilności, podano metody jej badania, czyli kryteria stabilności. Szczegółowo omówiono własności systemów stabilnych. Zaprezentowano systemy automatycznej regulacji, omówiono zadania im stawiane i sposoby ich realizacji. Przeprowadzono analizę stabilności takich systemów, poddano analizie ich reakcję na różne sygnały wymuszające. Zbadano także ich zachowanie, gdy działają na nie sygnały o charakterze losowym.

Przed przystąpieniem do studiowania zasadniczych partii podręcznika warto zapoznać się z zamieszczonymi na końcu dodatkami. Dodatek A dotyczy transformacji Laplace'a, jej zastosowań i spraw pokrewnych. Podano w nim własności transformacji, które są wykorzystywane w zasadniczej części podręcznika. Wyznaczono także transformaty najczęściej spotykanych funkcji. Pokazano ponadto, w jaki sposób za pomocą tej transformacji rozwiązuje się liniowe równania różniczkowe. Korzystając z niej, wprowadzono także pojęcie funkcji wykładniczej $e^{\mathbf{A}t}$, gdzie \mathbf{A} jest macierzą. Przedstawiono wreszcie spokrewnioną z nią transformację Fouriera.

W dodatku B omówiono transformację \mathcal{Z} , która jest podstawowym narzędziem stosowanym w analizie systemów dyskretnych, tzn. systemów charakteryzujących się tym, że czas biegnie w nich sposób dyskretny. Podano jej

definicję i własności. Wyznaczono przydatne transformaty \mathcal{Z} ciągów liczbowych, czyli sygnałów dyskretnych. Pokazano, w jaki sposób transformację tę wykorzystuje się do rozwiązywania równań różnicowych. Wskazano ponadto na związki między transformacjami Laplace'a i \mathcal{Z} . Przedstawiono także rezultaty dotyczące dyskretnej transformacji Fouriera.

Dodatek C zawiera podstawowe informacje na temat procesów stochastycznych o czasie ciągłym, jak również dyskretnym. Są one przydatne przy analizie systemów, w których sygnały wymuszające mają charakter losowy.

Często podawane przykłady oraz ćwiczenia, którym towarzyszą liczne wykresy i rysunki, pełnią rolę wyjaśniającą i ilustracyjną, a także przekazują treści leżące obok zasadniczego nurtu rozważań. Przedstawione rezultaty mają pełne i dokładne uzasadnienie. Wyjątkami są jedynie algebraiczne kryteria stabilności oraz pewne fakty dotyczące teorii macierzy i całki średniokwadratowej procesu stochastycznego.

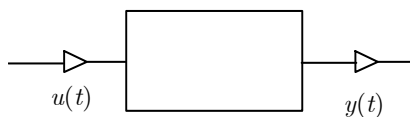
Autor dziękuje Pani dr Barbarze Łysakowskiej za przejrzanie rękopisu oraz uwagi, które zwiększyły walor dydaktyczny podręcznika. Podziękowania należą się także Pani mgr Aleksandrze Wawrzynkowskiej za korektę rękopisu.

Rozdział 2

Opisy liniowych systemów dynamicznych

2.1 Wprowadzenie

System dynamiczny będziemy przedstawiać graficznie w postaci prostokąta jak na rys. 2.1. Mówimy, że ma on wejście u oraz wyjście y . Sygnały wejściowy $u(t)$ i wyjściowy $y(t)$ są funkcjami czasu, których dziedzina, czyli zakres zmienności argumentu t , mogą być różne, np. może być tak, że $t \in [0, \infty)$ lub $t \in (-\infty, \infty)$. System dynamiczny przekształca więc jedną funkcję czasu w drugą, tzn. $u(t)$ w $y(t)$. Dopuszczamy przy tym możliwość pojawienia się zarówno w sygnale wejściowym, jak i wyjściowym, impulsu Diraca, a także jego tzw. pochodnych, patrz § A.1.3 w dodatku A, czyli sygnałów nie będących w istocie klasycznie rozumianymi funkcjami czasu. Zachowanie się takich systemów można opisać różnymi sposobami, które kolejno omówimy w poniższym rozdziale. Zbadamy także związki między tymi opisami.



Rys. 2.1. System dynamiczny

2.2 Równanie różniczkowe

2.2.1 Liniowe równanie różniczkowe

Podstawowym dla nas opisem systemu dynamicznego jest następujące, liniowe równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} & a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) \\ &= b_l u^{(l)}(t) + b_{l-1} u^{(l-1)}(t) + \dots + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

przy czym $a_m \neq 0$, $b_l \neq 0$. System, podobnie jak równanie, nazywa się liniowy. Mówimy, że m jest rzędem równania, czyli także systemu. Zestaw m liczb

$$y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-)$$

tworzy tzw. warunek początkowy. W szczególności, jeśli $y(0-) = y^{(1)}(0-) = \dots = y^{(m-1)}(0-) = 0$, to mówimy, że jest on zerowy.

Jak wiadomo, dla każdego warunku początkowego i funkcji $u(t)$ odcinkami ciągłej na półprostej $[0, \infty)$, równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie. Istnieje ono jednoznacznie także wtedy, gdy do takiego $u(t)$ dodany zostanie ponadto impuls Diraca lub jego pochodne. Zakładamy dodatkowo, że

$$u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots, u^{(l-1)}(0-) = 0. \quad (2.2)$$

Sygnały takie będziemy nazywać wymuszeniami lub pobudzeniami. Dla ustalenia uwagi podamy to w postaci definicji.

Definicja 2.1 *Wymuszeniem, czyli pobudzeniem, nazywamy sygnał $u(t)$, gdzie $t \in (-\infty, \infty)$, będący sumą funkcji odcinkami ciągłej, impulsu Diraca i jego pochodnych, który spełnia warunek (2.2).*

Jak już stwierdziliśmy, dla każdego warunku początkowego i każdego pobudzenia równanie (2.1) ma jednoznaczne rozwiązanie $y(t)$, $t \in [0, \infty)$. Informuje więc ono o tym, jaka, przy danym warunku początkowym, jest reakcja systemu na pobudzenie. Z uwagi na to, system będziemy utożsamiać z równaniem różniczkowym, jak również z innymi równoważnymi mu opisami, które poznamy później.

Wielomian

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.3)$$

nazywa się charakterystycznym, a $M(s) = 0$ równaniem charakterystycznym równania różniczkowego. Ma ono m rozwiązań s_1, s_2, \dots, s_m nazywanych pierwiastkami charakterystycznymi. Są one rzeczywiste lub zespolone. Każdemu pierwiastkowi zespolonemu towarzyszy drugi, sprzężony względem niego. Oznacza to, że pierwiastki zespolone występują parami, w których jeden jest sprzężony względem drugiego, patrz lemat A.1, s. 209. Pierwiastki rzeczywiste i pary sprzężonych pierwiastków zespolonych mogą być przy tym pojedyncze lub wielokrotne. Oznaczamy ponadto

$$L(s) = b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (2.4)$$

i zakładamy dodatkowo, że $M(s)$ i $L(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków, patrz uwagi w § 2.9.

W celu wyznaczenia reakcji systemu na pobudzenie $u(t)$, tzn. w celu rozwiązania równania (2.1), dokonujemy obustronnego przekształcenia Laplace'a. Uwzględniamy przy tym warunek początkowy i regułę o transformacji pochodnej, tzn. bierzemy pod uwagę to, że

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{y^{(1)}(t)\} &= sY(s) - y(0-), \\ \mathfrak{L}\{y^{(2)}(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-), \\ &\vdots \\ \mathfrak{L}\{y^{(m)}(t)\} &= s^mY(s) - s^{m-1}y(0-) - \dots - y^{(m-1)}(0-). \end{aligned}$$

Pamiętamy także, że ze względu na (2.2),

$$\mathfrak{L}\{u^{(1)}(t)\} = sU(s), \dots, \mathfrak{L}\{u^{(l)}(t)\} = s^l U(s).$$

Nie trzeba przy tym wyjaśniać, że $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$ oraz $U(s) = \mathfrak{L}\{u(t)\}$. Zatem

$$M(s)Y(s) - W(s) = L(s)U(s),$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem stopnia $m - 1$ o współczynnikach zależnych od warunku początkowego oraz a_1, \dots, a_m . Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie równania różniczkowego wyrażone w formie operatorowej, a mianowicie:

$$Y(s) = \frac{W(s)}{M(s)} + \frac{L(s)}{M(s)}U(s). \quad (2.5)$$

Wynika stąd ostatecznie, że odpowiedź systemu na pobudzenie $u(t)$ ma następującą postać:

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{M(s)} U(s) \right\}. \quad (2.6)$$

Reakcja $y(t)$ systemu zależy więc od:

- ▶ pobudzenia,
- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu, czyli współczynników a_0, \dots, a_m oraz b_0, \dots, b_l .

Jej pierwsza składowa zależy od:

- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie zależy od pobudzenia.

Jest ona odpowiedzią systemu na pobudzenie zerowe, gdyż w takiej sytuacji $U(s) = 0$. Innymi słowy, jest ona rozwiązaniem równania jednorodnego

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (2.7)$$

Druga składowa zależy natomiast od:

- ▶ pobudzenia,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie zależy od warunku początkowego.

Zauważmy przy tym, że jest ona reakcją systemu na pobudzenie $u(t)$ przy zerowym warunku początkowym, wtedy bowiem $W(s) = 0$.

Przykład 2.1 *Równanie różniczkowe opisujące system ma postać:*

$$Ty'(t) + y(t) = ku(t),$$

przy czym warunkiem początkowym jest $y(0-)$, a wymuszeniem $u(t) = 1(t)$. Przekształcenie Laplace'a dokonane wobec obydwu stron równania doprowadza do następnego równania

$$(Ts + 1)Y(s) - Ty(0-) = kU(s),$$

skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{T}{Ts + 1}y(0-) + \frac{k}{Ts + 1}U(s).$$

Ponieważ $U(s) = 1/s$, więc

$$Y(s) = \frac{T}{Ts + 1}y(0-) + \frac{k}{s(Ts + 1)}.$$

Zatem

$$y(t) = y(0-)e^{-t/T} + k \left(1 - e^{-t/T}\right).$$

Pierwsza składowa $y(0-)e^{-t/T}$ pochodzi od warunku początkowego, natomiast $k(1 - e^{-t/T})$ jest skutkiem wymuszenia $u(t) = 1(t)$.

Przykład 2.2 *Równanie systemu jest jak następuje:*

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4u'(t) + u(t).$$

Znajdziemy odpowiedź $y(t)$ na wymuszenie $u(t) = \delta(t)$ przy warunku początkowym $y'(0-), y(0-)$. Dokonując wobec równania różniczkowego obustronnej transformacji Laplace'a, otrzymujemy

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - [3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)] = (4s + 1)U(s).$$

Uwzględniając to, że $U(s) = 1$ oraz zauważając, że $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$, stwierdzamy, iż

$$Y(s) = \frac{3sy(0-) + 3y'(0-) + 2y(0-)}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{4s + 1}{s^2 + 3s + 2}.$$

Rozkład na ułamki proste doprowadza nas do wniosku, że

$$Y(s) = \frac{-y(0-) + 3y'(0-)}{s + 1} + \frac{4y(0-) - 3y'(0-)}{s + 2} - \frac{3}{s + 1} + \frac{7}{s + 2}.$$

Zatem $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, gdzie

$$y_1(t) = [-y(0-) + 3y'(0-)] e^{-t} + [4y(0-) - 3y'(0-)] e^{-2t}$$

oraz

$$y_2(t) = -3e^{-t} + 7e^{-2t}.$$

Składowa $y_1(t)$ pochodzi przy tym od warunku początkowego, natomiast $y_2(t)$ od wymuszenia.

2.2.2 Równanie liniowe jako rezultat linearyzacji

Liniowe równanie różniczkowe albo wprost opisuje system rzeczywisty albo, co jest znacznie częstsze, jest jedynie pewnym przybliżeniem jego zachowań. Z reguły bowiem systemy realnie istniejące są nieliniowe. Aby przedstawić, na czym polega to przybliżanie, czyli liniowa aproksymacja nazywana także linearyzacją, weźmy pod uwagę system o wejściu $\xi(t)$ i wyjściu $\eta(t)$ opisywany nieliniowym równaniem różniczkowym

$$\eta^{(m)} = \varphi(\eta^{(m-1)}, \dots, \eta^{(1)}, \eta; \xi^{(l)}, \dots, \xi^{(1)}, \xi),$$

gdzie φ jest pewną funkcją, zazwyczaj nieliniową. Dla prostoty oznaczeń pominiemy zmienną t .

Niech teraz (ξ_0, η_0) będzie tzw. punktem odniesienia, tzn. niech będzie tak, że jeśli $\xi(t) = \xi_0$ dla $t \in (-\infty, \infty)$, to $\eta(t) = \eta_0$ dla $t \in (-\infty, \infty)$. Oznacza to, że

$$\varphi(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0) = 0.$$

Jeśli bowiem system pozostaje w punkcie odniesienia, to jest w spoczynku, skąd wynika, że $\xi^{(1)}(t) = \dots = \xi^{(l)}(t) = 0$ i $\eta^{(1)}(t) = \dots = \eta^{(m)}(t) = 0$. Rozwijając funkcję φ w szereg Taylora w punkcie $(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)$ znajdujemy

$$\begin{aligned} \eta^{(m)} &= \varphi(\eta^{(m-1)}, \dots, \eta^{(1)}, \eta; \xi^{(l)}, \dots, \xi^{(1)}, \xi) - \varphi(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0) \\ &= -a_{m-1}(\eta - \eta_0)^{(m-1)} - \dots - a_1(\eta - \eta_0)^{(1)} - a_0(\eta - \eta_0) \\ &\quad + b_l(\xi - \xi_0)^{(l)} + \dots + b_1(\xi - \xi_0)^{(1)} + b_0(\xi - \xi_0) + R, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta^{(i)}} \Big|_{(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)}, \quad b_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^{(i)}} \Big|_{(0, \dots, 0, \eta_0; 0, \dots, 0, \xi_0)},$$

natomiast R jest resztą zawierającą wyrazy wyższego rzędu. Z dokładnością do tej reszty możemy zatem napisać

$$\begin{aligned} \eta^{(m)} &= -a_{m-1}(\eta - \eta_0)^{(m-1)} - \dots - a_1(\eta - \eta_0)^{(1)} - a_0(\eta - \eta_0) \\ &\quad + b_l(\xi - \xi_0)^{(l)} + \dots + b_1(\xi - \xi_0)^{(1)} + b_0(\xi - \xi_0). \end{aligned}$$

Oznaczając teraz $y(t) = \eta(t) - \eta_0$ oraz $u(t) = \xi(t) - \xi_0$ i zauważając, że, dla $i = 1, 2, \dots$, $\eta^{(i)} = y^{(i)}$ oraz $\xi^{(i)} = u^{(i)}$, otrzymujemy ostatecznie

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_0y = b_lu^{(l)} + b_{l-1}u^{(l-1)} + \dots + b_0u,$$

czyli liniowe równanie (2.1).

Należy zwrócić uwagę na to, że $\xi(t)$ oraz $\eta(t)$ mają charakter bezwzględny, natomiast $u(t)$ oraz $y(t)$ są względne, gdyż świadczą o odchyleniu $\xi(t)$ od ξ_0 oraz $\eta(t)$ od η_0 .

Przykład 2.3 *Przy braku tarcia ruch ciała o masie 1 pod wpływem siły F po poziomej płaszczyźnie można opisać równaniem*

$$v'(t) + r(v(t))v(t) = F(t),$$

gdzie v jest prędkością, $r(v) = v^2$ oporem ośrodka zależnym tutaj kwadratowo od prędkości. Jako punkt odniesienia, czyli typowy punkt pracy, przyjmujemy (F_0, v_0) , gdzie v_0 jest stałą prędkością osiąganą przez ciało pod wpływem siły F_0 , tzn. taką, dla której $r(v_0)v_0 = F_0$, czyli taką, że $v_0 = F_0^{1/3}$. Przepisując równanie ruchu w postaci

$$v'(t) = \varphi(v(t), F(t)),$$

gdzie $\varphi(v, F) = -r(v)v + F = -v^3 + F$, oraz oznaczając $u = F - F_0$, $y = v - v_0$ i rozwijając φ w szereg Taylora, otrzymujemy, z dokładnością do reszty zawierającej wyrazy wyższych rzędów,

$$y' + \alpha y = u,$$

gdzie $\alpha = (\partial\varphi(v, F)/\partial v)|_{v=v_0} = 3v_0^2$. Powyższe, liniowe równanie różniczkowe opisuje w sposób przybliżony ruch ciała, gdy działająca siła i wynikająca z niej prędkość niewiele różnią się od F_0 i v_0 . Współczynnik α zależy w sposób oczywisty od F_0 i v_0 , czyli punktu odniesienia. Sygnały u oraz y mają przy tym charakter względny, gdyż świadczą o odchyleniu F i v od F_0 i v_0 .

2.2.3 Proces, system, opis

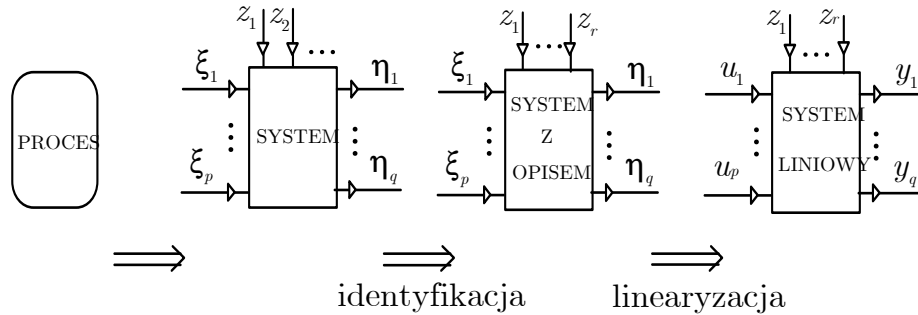
Zarówno nieliniowe równanie różniczkowe jak i liniowe, będące rezultatem jego linearyzacji, mają charakter abstrakcyjny. Ich zadaniem jest jednak opis rzeczywistego procesu. Przedstawimy teraz drogę, która prowadzi od procesu do równania, czyli od realnego procesu do jego matematycznej reprezentacji, patrz rys. 2.2.

Proces

Rzeczywisty proces może mieć różnoraki charakter. Może to być np. zespół zjawisk zachodzących w reaktorze chemicznym, kotle ciepłowniczym, czy na rynku pewnego produktu. Procesem tym może być także np. to, co dzieje się z lecącym samolotem. Natura zachodzących zjawisk może być całkowicie dowolna, mogą one mieć charakter np. chemiczny, fizyczny, ekonomiczny czy też społeczny.

System

W procesie takim wyróżniamy zestaw wielkości, odnośnie do których będziemy stawiać pewne wymagania, a które nazywamy wielkościami wyjściowymi. Na rys. 2.2 oznaczono je jako η_1, \dots, η_q . Po określeniu wielkości wyjściowych przychodzi kolej na wyróżnienie wielkości, za pomocą których będziemy się starali oddziaływać na proces tak, aby ustalone przed chwilą



Rys. 2.2. Od rzeczywistego procesu do systemu liniowego

wielkości wyjściowe zachowywały się w pożądanym sposób. Zaznaczone jako ξ_1, \dots, ξ_p , są one nazywane wejściowymi. Pozostałe, w nieznanym zazwyczaj liczbie, oznaczone jako z_1, z_2, \dots , mające wpływ na wyjścia są zakłóceniami. Jest przy tym oczywiste, że niektórych takich wielkości zakłócających możemy nie znać. Wynikiem tych wszystkich podjętych przez nas wyborów jest to, co nazywamy systemem. Jest to zatem proces z wyróżnionymi zestawami wielkości wejściowych i wyjściowych oraz zakłóceniami.

System z opisem

Określamy następnie opis systemu, np. równanie różniczkowe, zwykle nieliniowe. Procedura ustalania opisu nazywa się identyfikacją systemu. Wykonywana jest ona na podstawie tzw. informacji apriorycznej o systemie, np. równań wynikających z praw fizyki, oraz danych empirycznych, czyli wyników pomiarów przeprowadzonych na sygnałach wejściowych i wyjściowych systemu.

System liniowy

Jeśli nieliniowości otrzymanego równania nie są znaczne, to po przeprowadzeniu linearyzacji wokół nominalnego punktu pracy otrzymujemy liniowy system dynamiczny opisywany liniowym równaniem różniczkowym. Jego wielkości wejściowe u_1, \dots, u_p i wyjściowe y_1, \dots, y_q mają, jak już wiemy, charakter względny, tzn. odniesione są do punktu pracy. My przyjmujemy, że system ma tylko po jednym wejściu i wyjściu oraz że nie działają nań żadne zakłócenia.

Przykład 2.4 Niech procesem będzie zespół zjawisk zachodzących w lecącym samolocie. Przyjmując wysokość lotu, kurs i szybkość jako wielkości wyjściowe oraz położenie sterów wysokości, kierunku oraz natężenie dopływu paliwa jako

wejściowe, proces ten traktujemy jako system dynamiczny o trzech wejściach oraz trzech wyjściach. Zakłóceniami są np. szybkość i kierunek wiatru czy też ciśnienie powietrza. Korzystając następnie z praw aerodynamiki i danych pomiarowych ustala się w procesie identyfikacji opis takiego systemu, np. w postaci równań różniczkowych.

Przykład 2.5 W tzw. procesie pH do zbiornika, w którym stale zachodzi proces mieszania, wlewa się trzy substancje, silną zasadę, silny kwas oraz, ze stałym natężeniem dopływu, stabilizator. Celem jest otrzymanie cieczy o zadanym pH, tzn. o zadanym poziomie kwasowości. Jako wielkości wyjściowe można przyjąć poziom cieczy w zbiorniku oraz współczynnik pH w cieczy go opuszczającej. Wielkości wejściowe, to natężenia dopływu kwasu i zasady. Tak zdefiniowany system ma po dwie wielkości wejściowe i wyjściowe.

2.3 Transmitancja

2.3.1 Definicja. Liniowość systemu

Podamy teraz następny opis systemu liniowego nazywany transmitancją. Przypominamy przy tym, że $M(s)$ i $L(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.3) oraz (2.4).

Definicja 2.2 Transmitancją systemu o równaniu różniczkowym (2.1) nazywamy następującą funkcję:

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}.$$

Poniższa własność wynika bezpośrednio z zależności (2.5).

Własność 2.1 Przy zerowym warunku początkowym,

$$Y(s) = K(s)U(s).$$

Transmitancja wiąże zatem transformaty Laplace'a sygnałów na wejściu oraz wyjściu (jedyne) w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy. Jest ona funkcją wymierną, a jej bieguny są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $M(s)$. Z powyższej własności wynika ważne twierdzenie dotyczące istotnej cechy systemu, a mianowicie liniowości.

Twierdzenie 2.1 (liniowość systemu) *Niech warunek początkowy będzie zerowy. Jeśli na pobudzenia $u_1(t)$, $u_2(t)$ i $u(t)$ reakcjami systemu są odpowiednio $y_1(t)$, $y_2(t)$ i $y(t)$, to odpowiedziami na pobudzenia $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, $\int_0^t u(\tau)d\tau$ oraz $u'(t)$ są odpowiednio $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, $\int_0^t y(\tau)d\tau$ oraz $y'(t)$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 2.1. ■

Z twierdzenia 2.1 wynika, że operacji liniowej na sygnale wejściowym odpowiada taka sama operacja na sygnale wyjściowym. Należy zwrócić przy tym uwagę na to, że system ma własność liniowości jedynie wtedy, gdy warunek początkowy jest zerowy.

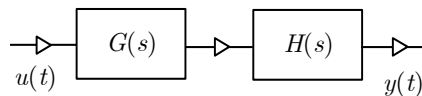
Zauważmy na koniec, że posługując się pojęciem transmitancji, odpowiedź (2.6) systemu na pobudzenie $u(t)$ można, przy dowolnym warunku początkowym, zapisać jako

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \{K(s)U(s)\}. \quad (2.8)$$

2.3.2 Transmitancja systemów złożonych

Łącząc proste systemy, nazywane często elementami lub członami, otrzymuje się bardziej skomplikowane struktury. Najprostszą jest połączenie szeregowe, czyli kaskadowe, rys. 2.3. Nietrudno sprawdzić, że transmitancją utworzonego w ten sposób systemu o wejściu u i wyjściu y , czyli ilorazem $Y(s)/U(s)$, jest

$$K(s) = G(s)H(s).$$

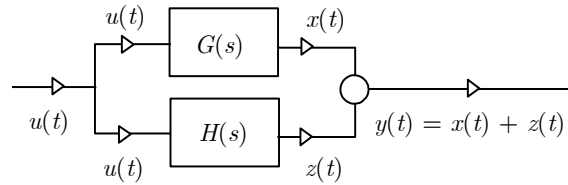


Rys. 2.3. Struktura szeregową

System powstały przez połączenie równoległe, pokazany na rys. 2.4, ma natomiast transmitancję wyrażającą się wzorem

$$K(s) = G(s) + H(s).$$

Zauważmy przy tym sposób, w jaki zaznaczono węzeł, przez który przepływa sygnał $u(t)$ oraz węzeł, w którym dodają się sygnały $x(t)$ oraz $z(t)$.



Rys. 2.4. Struktura równoległa

Bardziej skomplikowana jest struktura ze sprzężeniem zwrotnym, rys. 2.5. Wejściem utworzonego w ten sposób systemu jest u , a wyjściem y . Ponieważ $w(t) = u(t) - y(t)$, mówimy więc, że sprzężenie jest ujemne (dla $w(t) = u(t) + y(t)$ nazywamy je dodatnim). Z równości

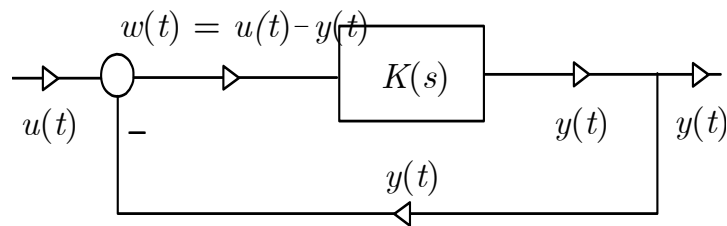
$$W(s) = U(s) - Y(s)$$

oraz

$$Y(s) = K(s)W(s),$$

wynika, że transmitancją takiego systemu (czyli ilorazem $Y(s)/U(s)$) jest

$$K_Z(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)}.$$



Rys. 2.5. Sprzężenie zwrotne

Ćwiczenie 2.1 Wykazać, że dla dodatniego sprzężenia zwrotnego transmitancją systemu zamkniętego jest $K_Z(s) = 1/(1 - K(s))$.

2.4 Odpowiedzi na standardowe pobudzenia

Zbadamy teraz odpowiedzi systemu na dwa standardowe pobudzenia, a mianowicie impuls Diraca $\delta(t)$ oraz skok jednostkowy $1(t)$. Później zajmiemy się także reakcją na trzecie takie pobudzenie, a mianowicie sinusoidę $\sin \omega t$, patrz § 4.3.3. Przypominamy, że $K(s) = L(s)/M(s)$, gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.4) i (2.3).

2.4.1 Odpowiedź impulsowa

Definicja 2.3 *Odpowiedzią impulsową $k(t)$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie impulsem Diraca $\delta(t)$ w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Relację między odpowiedzią impulsową i transmitancją ustala poniższa własność.

Własność 2.2 *Związek pomiędzy odpowiedzią impulsową i transmitancją jest następujący:*

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 2.1 oraz wziąć pod uwagę to, że $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. ■

Jest oczywiste, że powyższą własność rozumiemy w ten sposób, że $k(t) = 0$ dla $t < 0$ i $k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}$ dla $t \geq 0$.

W celu wyznaczenia odpowiedzi impulsowej wyszczególnimy bieguny transmitancji. Jako rozwiązania równania $M(s) = 0$, mogą być one rzeczywiste lub zespolone. Zespolone występują w parach, w których jeden jest sprzężony względem drugiego, patrz lemat A.1, s. 209. Są one zatem jak następuje:

- ▶ rzeczywiste ξ_1, \dots, ξ_p , różne o krotnościach k_1, \dots, k_p ,
 - ▶ pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, różne o krotnościach $\kappa_1, \dots, \kappa_q$,
- $$(2.9)$$

przy czym $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, gdzie $i = 1, \dots, q$. Jest przy tym oczywiste, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = m$. Omówimy najpierw sytuację, w której $l < m$.

Własność 2.3 *Niech $l < m$ i niech bieguny transmitancji będą jak w (2.9). System ma następującą odpowiedź impulsową:*

$$k(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t}$$

$$+2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}), \quad (2.10)$$

gdzie:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} K(s) \right],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{ds^{\kappa_i-j}} \left[(s - \eta_i)^{\kappa_i} K(s) \right],$$

przy czym $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$. Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Aby znaleźć odpowiedź impulsową wystarczy zauważyć, że jest ona oryginałem funkcji wymiernej $K(s) = L(s)/M(s)$, i że

$$k(t) \doteq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

patrz twierdzenie A.3, s. 213, a następnie, korzystając z (A.6), s. 200, oraz (A.8), znaleźć oryginał każdego ułamka. To, że $\alpha_{ik_i} \neq 0$ oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, wynika z drugiej części przywołanego twierdzenia. ■

Kolejna własność, z której będziemy nieraz korzystać, jest oczywista.

Własność 2.4 Dla $l < m$ odpowiedź impulsowa $k(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$.

Jeśli bieguny transmitancji są jednokrotne, to odpowiedź impulsową można przedstawić w znacznie prostszej postaci.

Wniosek 2.1 (bieguny jednokrotne) Niech $l < m$ i niech transmitancja ma następujące bieguny jednokrotne:

▷ rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$,

▷ pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$, (co oznacza, że $p + 2q = m$). Wówczas

$$k(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{j=1}^q |\beta_j| e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t - \varphi_j)$$

gdzie

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) K(s), \quad \beta_i = \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i) K(s)$$

oraz $\varphi_i = \arg \beta_i$.

Przykład 2.6 Niech $K(s) = (3s+1)/s(s+1)$. Dokonując rozkładu na ułamki proste dochodzimy do wniosku, że odpowiedzią impulsową jest $k(t) = 1 + 2e^{-t}$.

Przykład 2.7 Jeśli $K(s) = 1/(s+1)(s+2)$, to $k(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

Przykład 2.8 Dla $K(s) = (4s+1)/(s+1)(s-2)$ otrzymujemy odpowiedź impulsową o postaci $k(t) = e^{-t} + 3e^{2t}$.

Przykład 2.9 Niech $K(s) = s(s-1)/(s+1)(s^2+1)$. Zatem $k(t) = e^{-t} - \sin t$.

Przykład 2.10 Dla $K(s) = 1/(s+3)^2$ odpowiedzią impulsową jest te^{-3t} .

Zbadamy teraz własności odpowiedzi impulsowej w punkcie $t = 0$, które związane są z szybkością, z jaką system reaguje na pobudzenie. Zauważmy przede wszystkim, że, dzięki własności 2.4, odpowiedź ta ma w tym punkcie wszystkie (prawostronne) pochodne.

Własność 2.5 Niech $p = m - l$. Dla $p = 1$,

$$k(0) = \frac{b_l}{a_m} \neq 0,$$

natomiast dla $p \geq 2$,

$$k(0) = k^{(1)}(0) = \dots = k^{(p-2)}(0) = 0 \text{ i dopiero } k^{(p-1)}(0) = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy odwołać się do lematu A.4, s. 221. ■

Ostatnia własność stwierdza więc, że odpowiedź impulsowa systemu oraz jej pochodne rzędu $1, 2, \dots, p-2$ zerują się w punkcie $t = 0$ i dopiero pochodna rzędu $p-1$ jest niezerowa. Liczba p jest przy tym różnicą między stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku transmitancji. Jest oczywiste, że im większa ta różnica, tym więcej pochodnych zeruje się, czyli tym wolniejsze narastanie odpowiedzi impulsowej w jej początkowym przebiegu. Innymi słowy, im większe p , tym większa bezwładność systemu.

Przykład 2.11 Dla transmitancji $K(s) = (7s+6)/(2s^3+s^2+4s+5)$ otrzymujemy $k(0) = 0$, $k'(0) = 7/2$.

Przykład 2.12 Dla $K(s) = 1/(2s^3+3s^2+4s+5)$ znajdujemy $k(0) = k'(0) = 0$ oraz $k''(0) = 1/2$.

Przykład 2.13 Niech $K(s) = 1/M(s)$. Dla $m = 1$ wyliczamy $k(0) = 1/a_1 \neq 0$. Dla $m \geq 2$ obserwujemy, że $k(0) = k^{(1)}(0) = \dots = k^{(m-2)}(0) = 0$ i dopiero $k^{(m-1)}(0) = 1/a_m \neq 0$.

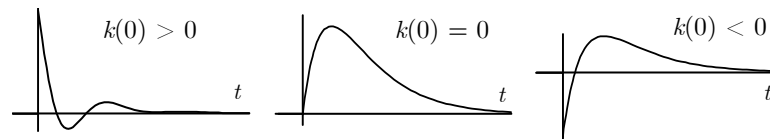
Przykład 2.14 Na rys. 2.6 pokazano odpowiedzi impulsowe systemów o transmitancjach:

a) $(5s^2 + 8s + 20)/(s + 1)(s^2 + 4s + 20)$,

b) $2/(s + 1)(s + 2)$,

c) $(-s + 2)/(s + 1)(s + 2)$.

W pierwszej, $m - l = 1$, a co za tym idzie $k(0) = 5 > 0$. W drugiej, $m - l = 2$, a zatem $k(0) = 0$ oraz $k'(0) = 2$. W trzeciej, $m - l = 1$ i $k(0) = -1 < 0$.



Rys. 2.6. Odpowiedzi impulsowe, przykład 2.14

2.4.2 Odpowiedź skokowa

Definicja 2.4 Odpowiedzią skokową $\lambda(t)$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie skokiem jednostkowym $1(t)$ w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.

Podamy teraz związek pomiędzy odpowiedzią skokową i transmitancją.

Własność 2.6 Relacja między odpowiedzią skokową i transmitancją jest dana wzorem:

$$\lambda(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} K(s) \right\}.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 2.1 oraz wziąć pod uwagę to, że $\mathfrak{L}\{1(t)\} = s^{-1}$. ■

Jest oczywiste, że własność powyższą rozumiemy w ten sposób, że $\lambda(t) = 0$ dla $t < 0$ i $\lambda(t) = s^{-1} \mathfrak{L}^{-1}\{K(s)\}$ dla $t \geq 0$.

Relację pomiędzy odpowiedzią skokową i impulsową określa poniższa własność.

Własność 2.7 Odpowiedź impulsowa jest powiązana ze skokową następującym wzorem:

$$\lambda(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau, \quad \text{tzn.} \quad k(t) = \lambda'(t).$$

Poniżej wyznaczamy odpowiedź skokową systemu.

Własność 2.8 Niech $l < m$ i niech bieguny transmitancji będą oznaczone jak w (2.9), przy czym $\xi_1 = 0$. System ma następującą odpowiedź skokową:

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \sum_{j=1}^{k_1+1} c_{1j} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |d_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

przy czym

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{1}{(k_1 + 1 - j)!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^{k_1-j+1}}{ds^{k_1-j+1}} \left[s^{k_1} K(s) \right], \\ c_{ij} &= \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{1}{s} K(s) \right], \\ d_{ij} &= \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{ds^{\kappa_i-j}} \left[(s - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{1}{s} K(s) \right] \end{aligned}$$

oraz $\psi_{ij} = \arg d_{ij}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $k_1 + 1$ jest krotnością bieguna $\xi_1 = 0$ funkcji $s^{-1}K(s)$, i że, w związku z tym,

$$\frac{1}{s} K(s) = \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j}}{s^j} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{d_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\bar{d}_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right]$$

oraz znaleźć oryginał każdego ułamka, patrz (A.6), s. 200, i (A.8). ■

Wniosek 2.2 (bieguny jednokrotne) Jeśli wszystkie bieguny transmitancji są jednokrotne i żaden nie leży w punkcie $s = 0$, to

$$\lambda(t) = K(0) + \sum_{i=1}^p c_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q |d_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \psi_i),$$

gdzie

$$c_i = \frac{1}{\xi_i} \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i)K(s), \quad d_i = \frac{1}{\eta_i} \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i)K(s)$$

oraz $\psi_i = \arg d_i$.

Przykład 2.15 Jest oczywiste, że dla transmitancji $K(s) = 2/(s+2)$ otrzymujemy $\lambda(t) \hat{=} 2/s(s+2)$. Ponieważ

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2},$$

zatem $\lambda(t) = 1 - e^{-2t}$.

Własność 2.9 Jeśli $l \leq m$, to odpowiedź skokowa $\lambda(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla $l \leq m$ odpowiedź skokowa jest oryginałem funkcji wymiernej $s^{-1}K(s)$, w której stopień wielomianu w liczniku jest niższy od stopnia wielomianu w mianowniku. ■

Ustalimy teraz zachowanie się odpowiedzi skokowej w punkcie $t = 0$. Podana poniżej własność w sposób oczywisty koresponduje z własnością 2.5 dotyczącą odpowiedzi impulsowej.

Własność 2.10 Niech $p = m - l$. Dla $p = 0$

$$\lambda(0) = \frac{b_m}{a_m} \neq 0,$$

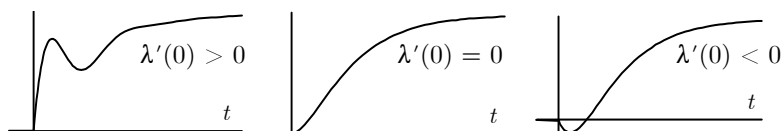
natomiast dla $p \geq 1$

$$\lambda(0) = \lambda^{(1)}(0) = \dots = \lambda^{(p-1)}(0) = 0 \text{ i dopiero } \lambda^{(p)}(0) = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z lematu A.5, s. 222. ■

Liczba pochodnych odpowiedzi skokowej systemu zerujących się dla $t = 0$ świadczy o jego bezwładności. Zatem im większa różnica pomiędzy stopniami wielomianów w liczniku i mianowniku transmitancji, tym większa bezwładność, czyli inercja. Efekt ten zaobserwowaliśmy już omawiając odpowiedź impulsową.

Przykład 2.16 Dla systemów jak w przykładzie 2.14, na rys. 2.7 pokazano odpowiedzi skokowe odpowiadające kolejnym transmitancjom.



Rys. 2.7. Odpowiedzi skokowe, przykład 2.16

Przykład 2.17 Dla transmitancji $(s + 2)/(3s + 5)$ bez trudu otrzymujemy $\lambda(0) = 1/3$.

Przykład 2.18 Dla transmitancji $1/(2s + 1)$ znajdujemy $\lambda(0) = 0$ oraz $\lambda'(0) = k(0) = 1/2$.

Przykład 2.19 Jeśli $K(s) = 1/M(s)$, gdzie $m \geq 1$, to $\lambda(0) = \lambda'(0) = \dots = \lambda^{(m-1)}(0) = 0$ i dopiero $\lambda^{(m)}(0) = 1/a_m \neq 0$.

Przykład 2.20 Dla $K(s) = 1/(3s^2 + 4s + 5)$ wyliczamy $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ oraz $\lambda''(0) = 1/3$.

2.4.3 Odpowiedzi systemu a bieguny transmitancji

Odpowiedź impulsowa (2.10) zawiera dwa typy składowych, które są związane odpowiednio z biegunami rzeczywistymi oraz parami biegunów zespolonych. Omówimy je teraz kolejno.

Tabela 2.1. Odpowiedzi systemu. Bieguny rzeczywiste

Bieguny	$k(t)$	$\lambda(t)$

Rzeczywisty biegun jednokrotny, powiedzmy ξ , wnosi składową $e^{\xi t}$. Jeśli ma on krotność k , to w odpowiedzi występują składniki postaci

$$e^{\xi t}, te^{\xi t}, \dots, t^{k-1}e^{\xi t}.$$

Dla $\xi < 0$ każdy z nich zbiega się do zera, gdy $t \rightarrow \infty$, i to niezależnie od krotności. Dla $\xi = 0$ składowa jest ograniczona, gdy $k = 1$, i nieograniczona, gdy $k \geq 2$. Dla $\xi > 0$ składowa związana z tym biegunem narasta do nieskończoności niezależnie od jego krotności.

Tabela 2.2. Odpowiedzi systemu. Bieguny zespolone

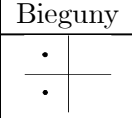
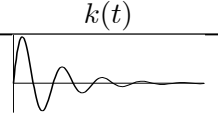
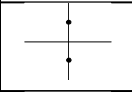
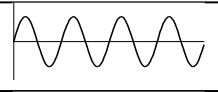
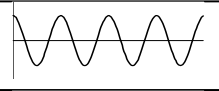
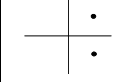
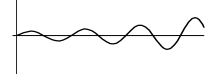
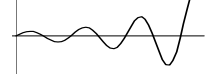
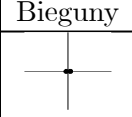
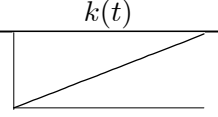
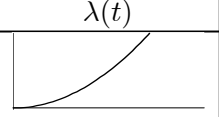
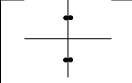

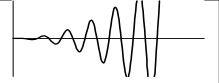
Bieguny	$k(t)$	$\lambda(t)$
		
		
		

Tabela 2.3. Odpowiedzi systemu. Bieguny podwójne na osi $j\omega$

Bieguny	$k(t)$	$\lambda(t)$
		
		

Z kolei jednokrotna para biegunów zespolonych $(\sigma + j\omega, \sigma - j\omega)$, $\omega \neq 0$, powoduje pojawienie się składowej typu $e^{\sigma t} \cos \omega t$. Jeśli ma ona krotność k , to odpowiedź impulsowa zawiera składniki typu

$$e^{\sigma t} \cos \omega t, t e^{\sigma t} \cos \omega t, \dots, t^{k-1} e^{\sigma t} \cos \omega t.$$

Niezależnie od krotności pary, dla $\sigma < 0$, każdy z tych składników maleje do zera, gdy $t \rightarrow \infty$. Dla $\sigma = 0$ i $k = 1$, w odpowiedzi występuje natomiast składowa periodyczna $\cos \omega t$ o stałej amplitudzie. Dla $\sigma = 0$ i $k \geq 2$, pojawia się przebieg periodyczny o amplitudzie narastającej do nieskończoności tak szybko jak t^{k-1} . Dla $\sigma > 0$, amplituda tej składowej periodycznej rośnie jeszcze szybciej, z prędkością wyznaczoną przez $t^{k-1} e^{\sigma t}$.

W tabelach 2.1–2.3 przedstawiono charakterystyczne cechy składowych odpowiedzi impulsowej i skokowej wnoszone przez różne bieguny transmitancji.

Zauważmy, że para biegunów zespolonych jest przyczyną pojawiania się składowej periodycznej.

Ćwiczenie 2.2 Powiązać fakt zbiegania się składowej odpowiedzi impulsowej do zera z położeniem odpowiadającego jej bieguna, lub pary biegunów.

2.5 Transmitancja widmowa

2.5.1 Definicja

Definicja 2.5 *Transmitancją widmową nazywamy następującą funkcję argumentu ω :*

$$K(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} K(s)|_{s=j\omega},$$

przy czym $\omega \in [0, \infty)$.

Transmitancja widmowa jest funkcją rzeczywistego argumentu ω , który nazywa się pulsacją. Ponieważ $K(j\omega)$ przyjmuje wartości zespolone, można ją zatem przedstawić na dwa sposoby jako np.

$$K(j\omega) = \operatorname{Re} K(j\omega) + \operatorname{Im} K(j\omega)$$

lub też

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$.

Jeśli odpowiedź impulsowa systemu $k(t)$ jest taka, że $\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty$, to istnieje jej transformata Fouriera $\tilde{K}(\omega)$, patrz § A.6. W sytuacji takiej $K(j\omega) = \tilde{K}(\omega)$. Warto jednak podkreślić, że nie zawsze całka $\int_0^\infty |k(t)| dt$ jest skończona, patrz przykład 2.22. Wówczas transmitancja widmowa $K(j\omega)$ oczywiście istnieje, natomiast całka Fouriera $\tilde{K}(\omega)$ nie.

Przykład 2.21 *Dla systemu o transmitancji*

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 4}$$

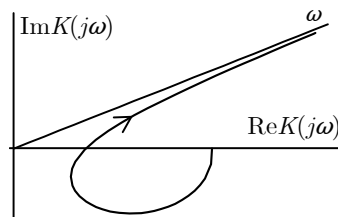
transmitancją widmową jest

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 4} \\ &= \frac{-\omega^2 + 4}{\omega^4 + \omega^2 + 16} - j \frac{3\omega}{\omega^4 + \omega^2 + 16}. \end{aligned}$$

Przykład 2.22 System o transmitancji $K(s) = 1/s$ ma transmitancję widmową $K(j\omega) = -j/\omega$. Transformacja Fouriera $\tilde{K}(\omega)$ odpowiedzi impulsowej, czyli funkcji $k(t) = 1(t)$ nie istnieje, bowiem $\int_0^\infty k(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^\infty \cos(\omega t)dt + j \int_0^\infty \sin(\omega t)dt$ nie istnieje. W sprawie szczegółów patrz § A.6.

2.5.2 Charakterystyki częstotliwościowe

Transmitancja widmowa $K(j\omega)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej ω i przyjmuje wartości zespolone. W sposób graficzny można ją zatem przedstawić jako krzywą w przestrzeni o trzech wymiarach, jak to uczyniono na rys. 2.8. Strzałką pokazano kierunek wzrostu zmiennej ω . Reprezentacji tego wykresu na płaszczyźnie może być zatem wiele. Nazywamy je charakterystykami częstotliwościowymi. Poniżej przedstawimy dwie najważniejsze.



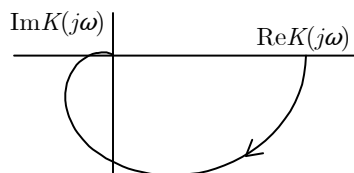
Rys. 2.8. Przykład wykresu $K(j\omega)$ w przestrzeni trójwymiarowej

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

Wykres funkcji $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej nazywa się charakterystyką amplitudowo-fazową. Przykład pokazano na rys. 2.9. Strzałka oznacza kierunek wzrostu ω . Charakterystyka ta powstaje przez rzutowanie krzywej pokazanej na rys. 2.8 na płaszczyznę zmiennej zespolonej ($\text{Re } K(j\omega)$, $\text{Im } K(j\omega)$).

Charakterystyki logarytmiczne

Komplet charakterystyk logarytmicznych tworzą dwa wykresy, a mianowicie charakterystyki amplitudowa i fazowa. Skala osi ω jest na obu logarytmiczna, dekadowa, co oznacza, że punkty odpowiadające pulsacjom różniącym się 10 razy są jednakowo oddalone od siebie. Dla charakterystyki amplitudowej miarą wzmocnienia jest $20 \log |K(j\omega)|$, a jednostką decybel (w skrócie dB), natomiast



Rys. 2.9. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej

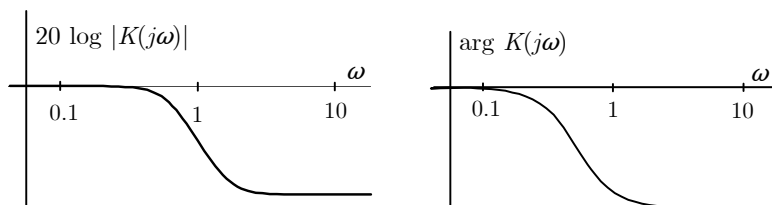
fazą jest oczywiście $\arg K(j\omega)$. Przykład takich charakterystyk pokazano na rys. 2.10.

Charakterystyki logarytmiczne mają ważną własność addytywności przy połączeniu szeregowym jak na rys. 2.3. Pamiętając, że transmitancją takiego połączenia jest $K(s)G(s)$, zauważamy bowiem, iż

$$20 \log |K(j\omega)G(j\omega)| = 20 \log |K(j\omega)| + 20 \log |G(j\omega)|$$

oraz

$$\arg[K(j\omega)G(j\omega)] = \arg K(j\omega) + \arg G(j\omega).$$



Rys. 2.10. Charakterystyki logarytmiczne

2.6 Splot

Z własności 2.1 i reguły o splotcie, s. 198, wynika, że przy zerowym warunku początkowym

$$y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t k(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

gdzie $k(t)$ jest odpowiedzią impulsową.

Przy dowolnym warunku początkowym reakcję (2.8) systemu można teraz zapisać jako

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.12)$$

Ćwiczenie 2.3 Niech $u(t)$ będzie ograniczone, a warunek początkowy dowolny. Korzystając z własności 2.4, wykazać, że

- (a) jeśli $l < m$, to odpowiedź systemu $y(t)$ jest funkcją ciągłą,
 (b) jeśli $l = m$, to punkty nieciągłości odpowiedzi $y(t)$ oraz pobudzenia $u(t)$ są identyczne.

2.7 Równanie fazowe

Załóżmy, że pobudzenie jest zerowe, tzn. że $u(t) = 0$ dla $t \in [0, \infty)$. W sytuacji tej (2.1) staje się równaniem jednorodnym (2.7). Niech ponadto $a_m = 1$, tzn. niech równanie to ma postać

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0.$$

Wektor

$$\boldsymbol{\xi}(t) = [y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)]^T,$$

gdzie T oznacza transpozycję, nazywa się fazowym. Jak łatwo sprawdzić,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(t),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

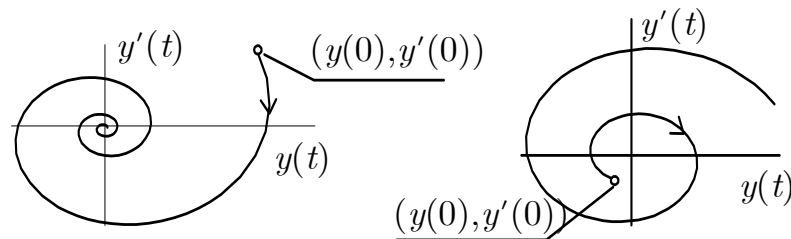
przy czym $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{m-1}]^T$. Wektorem warunku początkowego jest

$$\boldsymbol{\xi}(0) = [y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(m-1)}(0)]^T.$$

Otrzymane jednorodne, wektorowe równanie pierwszego rzędu nazywa się fazowym. Jego rozwiązanie ma następującą postać:

$$\xi(t) = e^{\mathbf{A}t}\xi(0).$$

Wykres, który je przedstawia, czyli wykres krzywej $\xi(t)$ w przestrzeni fazowej, nazywa się trajektorią fazową. Przykłady pokazano na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Przykłady trajektorii fazowej

Ponieważ

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (2.14)$$

patrz ćwiczenie 2.4, więc $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \equiv M(\lambda)$, gdzie $M(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym (2.3) transmitancji. Ponieważ pierwiastki wielomianu $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ nazywają się wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , więc wynika stąd poniższa własność:

Własność 2.11 *Bieguny transmitancji $K(s)$ i wartości własne macierzy \mathbf{A} są identyczne.*

Ponieważ $y(t) = \gamma^T \xi(t) = \gamma^T e^{\mathbf{A}t} \xi(0)$, gdzie $\gamma = [1, 0, \dots, 0]^T$, zatem reakcją systemu na wymuszenie zerowe jest

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{M(s)} \right\} = \gamma^T e^{\mathbf{A}t} \xi(0),$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem jak w (2.6).

Ćwiczenie 2.4 *Rozwijając wyznacznik $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ względem ostatniego wiersza, wykazać równość (2.14).*

2.8 Wektorowe równanie różniczkowe

Opis systemu jakim jest równanie różniczkowe (2.1) ma pewną niedogodność, którą jest to, że odpowiedzi impulsowej nie można przedstawić jako funkcji zależnej w sposób jawny od jego współczynników. Z tego też względu wygodnie w pewnych sytuacjach posłużyć się wektorowym równaniem różniczkowym.

Zacznijmy od skalarnego równania (2.1), w którym $a_m = 1$, tzn. od

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + a_0y = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_0u,$$

z warunkiem początkowym $y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-)$ i zapiszmy je jak poniżej:

$$y^{(m)} + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix} + b_mu^{(m)}, \quad (2.15)$$

gdzie $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{m-1}]^T$, $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{m-1}]^T$. Wykażemy teraz, że skalarnie równanie (2.15) rzędu m można przekształcić do następującego równania wektorowego rzędu 1:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \beta u \\ y &= \gamma^T \mathbf{x} + \rho u \end{aligned} \right\}, \quad (2.16)$$

gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ jest wektorem o wymiarze m . Warunkiem początkowym jest $\mathbf{x}(0-)$. W równaniu tym $\gamma = [1, 0, \dots, 0]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}$$

oraz

$$\rho = b_m. \quad (2.17)$$

Aby określić jeszcze wektor β , zdefiniujmy macierz

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

oraz zauważmy, że $\det \Delta = (-1)^{m(m-1)/2} \neq 0$, skąd wynika, że Δ^{-1} istnieje. Wektor $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_{m-1}]^T$ wyraża się wzorem jak poniżej:

$$\beta = \Delta^{-1}(\mathbf{b} - b_m \mathbf{a}), \quad (2.19)$$

co jest równoważne z tym, że

$$\mathbf{b} = \mathbf{\Delta}\boldsymbol{\beta} + \rho\mathbf{a}. \quad (2.20)$$

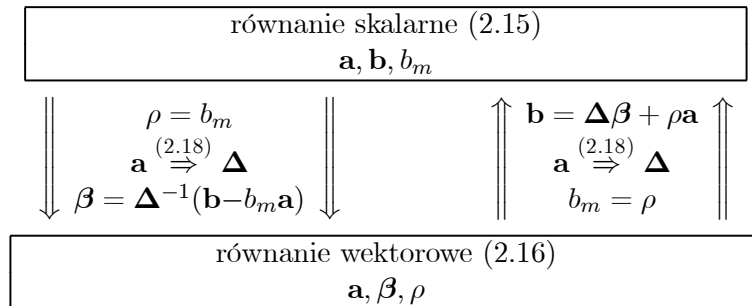
Ponadto wektor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T$ jest postaci

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix} - (\mathbf{B} + \rho\mathbf{I}) \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \beta_0 & \ddots & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \beta_{m-3} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \beta_{m-2} & \beta_{m-3} & \ddots & \beta_0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

Podany związek pomiędzy równaniem skalarnym (2.15) rzędu m , tzn. \mathbf{a} , \mathbf{b} oraz b_m , i wektorowym (2.16) pierwszego rzędu, czyli \mathbf{a} , $\boldsymbol{\beta}$ oraz ρ , jest wzajemnie jednoznaczny, gdyż $\mathbf{\Delta}$ jest macierzą nieosobliwą. Jest on wyjaśniony na schemacie podanym poniżej.



Należy jeszcze wykazać prawdziwość podanych relacji między równaniem skalarnym i wektorowym, co czynimy w poniższym dowodzie.

Dowód równoważności opisów. Dowód polega na zweryfikowaniu wzorów (2.21) oraz (2.17), a następnie (2.19), czyli (2.20).

W celu sprawdzenia (2.21) zaczynamy od zestawu równań (2.16). Szczegółowe przepisanie pierwszego, wektorowego równania prowadzi do m równań

skalarnych podanych poniżej:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= x_2 + \beta_0 u, \\ x_2^{(1)} &= x_3 + \beta_1 u, \\ &\vdots \\ x_{m-1}^{(1)} &= x_m + \beta_{m-2} u, \\ x_m^{(1)} &= -\mathbf{a}^T \mathbf{x} + \beta_{m-1} u. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Drugie, skalarne równanie w (2.16), oznacza, że $y = x_1 + \rho u$, czyli

$$x_1 = y - \rho u,$$

skąd, po zróżniczkowaniu, otrzymujemy $x_1^{(1)} = y^{(1)} - \rho u^{(1)}$. Z pierwszego równania w (2.22) wynika $x_2 = x_1^{(1)} - \beta_0 u$, co po uwzględnieniu wyniku różniczkowania, doprowadza do

$$x_2 = y^{(1)} - \beta_0 u - \rho u^{(1)}.$$

Różniczkując, możemy więc napisać, że $x_2^{(1)} = y^{(2)} - \beta_0 u^{(1)} - \rho u^{(2)}$. Z drugiego równania w (2.22) otrzymujemy $x_3 = x_2^{(1)} - \beta_1 u$ i, po uwzględnieniu rezultatu ostatniego różniczkowania, zauważamy, że

$$x_3 = y^{(2)} - \beta_1 u - \beta_0 u^{(1)} - \rho u^{(2)}.$$

Różniczkując stwierdzamy, że $x_3^{(1)} = y^{(3)} - \beta_1 u^{(1)} - \beta_0 u^{(2)} - \rho u^{(3)}$. Z trzeciego równania wynika $x_4 = x_3^{(1)} - \beta_2 u$, skąd, po uwzględnieniu wyniku różniczkowania, otrzymujemy

$$x_4 = y^{(3)} - \beta_2 u - \beta_1 u^{(1)} - \beta_0 u^{(2)} - \rho u^{(3)}.$$

Postępując w ten sposób, dochodzimy w końcu do ostatniego równania

$$x_m = y^{(m-1)} - \beta_{m-2} u - \dots - \beta_1 u^{(m-3)} - \beta_0 u^{(m-2)} - \rho u^{(m-1)}. \quad (2.23)$$

Zestawiając razem otrzymane związki, spostrzegamy, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_0 u \\ \beta_1 u + \beta_0 u^{(1)} \\ \vdots \\ \beta_{m-2} u + \beta_{m-3} u^{(1)} + \dots + \beta_0 u^{(m-2)} \end{bmatrix}$$

$$-\rho \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix},$$

co oznacza, że wzór (2.21) jest prawdziwy.

W celu zweryfikowania (2.17) i (2.20), zauważamy, że obustronne zróżniczkowanie (2.23) doprowadza do równania

$$x_m^{(1)} = y^{(m)} - \beta_{m-2}u^{(1)} - \dots - \beta_1u^{(m-2)} - \beta_0u^{(m-1)} - \rho u^{(m)},$$

co oznacza, że

$$y^{(m)} - x_m^{(1)} = [0, \beta_{m-2}, \dots, \beta_0] \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix} + \rho u^{(m)}.$$

Biorąc pod uwagę ostatnie z równań w (2.22) otrzymujemy więc

$$y^{(m)} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} = [\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \dots, \beta_0] \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix} + \rho u^{(m)}$$

i po uwzględnieniu (2.21) możemy napisać, że

$$\begin{aligned} & y^{(m)} + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{a}^T (\mathbf{B} + \rho \mathbf{I}) + [\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \dots, \beta_0]) \begin{bmatrix} u \\ u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{bmatrix} + \rho u^{(m)}. \end{aligned}$$

Porównując powyższe z równaniem (2.15) weryfikujemy (2.17) i dochodzimy do wniosku, że

$$\mathbf{b}^T = \mathbf{a}^T (\mathbf{B} + \rho \mathbf{I}) + [\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_0].$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^T &= [a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{m-3} & \beta_{m-4} & \cdots & 0 \\ \beta_{m-2} & \beta_{m-3} & \cdots & \beta_0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + [\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_0] + \rho \mathbf{a}^T \\
&= [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m-1} & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} + \rho \mathbf{a}^T \\
&= \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Delta} + \rho \mathbf{a}^T.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}^T$, więc $\mathbf{b} = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\beta} + \rho \mathbf{a}$. Zatem także (2.20) zostało zweryfikowane. Dowód został więc zakończony. ■

Wyznamy teraz reakcję systemu o równaniu (2.16) na pobudzenie $u(t)$. Dokonując w tym celu obustronnego przekształcenia Laplace'a wobec pierwszego z równań w (2.16), otrzymujemy

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0-) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \boldsymbol{\beta}U(s),$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\beta}U(s).$$

W rezultacie

$$Y(s) = \boldsymbol{\gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0-) + [\boldsymbol{\gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\beta} + \rho] U(s).$$

Z uwagi na to, że $\mathfrak{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = e^{\mathbf{A}t}$, patrz § A.5, odpowiedź (2.12) systemu na wymuszenie $u(t)$ można zapisać teraz w następującej postaci:

$$y(t) = \boldsymbol{\gamma}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0-) + \int_0^t \boldsymbol{\gamma}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \boldsymbol{\beta} u(\tau) d\tau + \rho u(t).$$

Transmitancją systemu jest natomiast

$$K(s) = \boldsymbol{\gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\beta} + \rho,$$

a odpowiedzią impulsową

$$k(t) = \gamma^T e^{\mathbf{A}t} \boldsymbol{\beta} + \rho \delta(t).$$

Możemy więc stwierdzić, że gdy $b_m \neq 0$, wówczas $\rho \neq 0$ i w rezultacie odpowiedź impulsowa zawiera impuls Diraca. Transmitancja charakteryzuje się tym, że stopnie wielomianów $L(s)$ i $M(s)$ są takie same. Jeśli natomiast $b_m = 0$, to $\rho = 0$. W sytuacji takiej odpowiedź impulsowa nie zawiera impulsu Diraca, a stopień $L(s)$ jest niższy od stopnia $M(s)$.

Przykład 2.23 Dla równania

$$y^{(m)}(t) + a_{m-1}y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_0u(t),$$

przyjmując $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, gdzie $\boldsymbol{\xi}$ jest wektorem fazowym, otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\beta}u, \\ y &= \gamma^T \mathbf{x}, \end{aligned} \right\}$$

przy czym $\boldsymbol{\beta} = [0, \dots, b_0]$.

Przykład 2.24 Niech

$$y'' + a_1y' + a_0y = b_1u' + b_0u,$$

co oznacza, że $\mathbf{a} = [a_0, a_1]^T$, $\mathbf{b} = [b_0, b_1]^T$ i

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1b_1 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1b_1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1, 0]\mathbf{x}, \end{aligned} \right\}$$

przy czym

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} - b_1u \end{bmatrix}.$$

2.9 Związki między opisami

Podstawowym opisem systemu jest dla nas skalarne równanie różniczkowe, ale najchętniej będziemy posługiwać się transmitancją. Powstaje więc pytanie o to, czy te dwa opisy, tzn. równanie różniczkowe i transmitancja są równoważne. Odpowiedź jest negatywna.

Zauważmy przede wszystkim, że równanie jednoznacznie określa transmitancję. Okazuje się jednak, że przejście w drugą stronę nie zawsze jest możliwe, wiele równań różniczkowych prowadzi bowiem do tej samej transmitancji. Dla przykładu, równania

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u'(t) + 2u(t)$$

oraz

$$y'(t) + y(t) = u(t)$$

prowadzą do tej samej transmitancji, a mianowicie $1/(s+1)$. Jest to spowodowane tym, że wielomiany $M(s) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ oraz $L(s) = s + 2$, które otrzymuje się po dokonaniu obustronnej transformacji Laplace'a pierwszego z tych równań, mają wspólny pierwiastek.

Można wykazać, że równanie różniczkowe i transmitancja są opisami równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $M(s)$ i $L(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków. Z tego też powodu założenie to zostało przez nas przyjęte na samym początku, patrz § 2.2.1.

Na jeden fakt warto jeszcze zwrócić uwagę. Okazuje się, że systemy o różnych transmitancjach mogą mieć jednakowe charakterystyki amplitudowe, ale różne fazowe, np. $K(s)$ oraz $[(s-1)/(s+1)]K(s)$. Z drugiej strony, systemy o transmitancjach $K(s)$ oraz $2K(s)$ mają identyczne charakterystyki fazowe, ale różne amplitudowe. Wynika stąd zatem wniosek, że ani sama tylko charakterystyka amplitudowa, ani sama fazowa nie określają w sposób jednoznaczny transmitancji.

2.10 Uwagi końcowe

W rozdziale powyższym pewne wyniki są prawdziwe dla każdej transmitancji, ale niektóre tylko dla takich, w których $l < m$. Pokażemy teraz, jak one wyglądają, gdy nierówność ta nie jest spełniona.

Dla przykładu, badając odpowiedź impulsową, dla $l \geq m$ transmitancję możemy przedstawić w następującej postaci:

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{N(s)}{M(s)} + \sum_{i=0}^{l-m} b_i s^i,$$

gdzie $N(s)$ jest wielomianem o stopniu niższym niż m . Wynika stąd, że $k(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, gdzie $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{N(s)/M(s)\}$ oraz $\psi(t) = \sum_{i=0}^{l-m} b_i \delta^{(i)}(t)$. Korzystając z własności A.1, s. 221, stwierdzamy, że $\varphi(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na domkniętej półprostej $t \in [0, \infty)$. Z kolei $\psi(t)$ zawiera impuls Diraca i jego pochodne, tym niemniej $\psi(t) = 0$ dla $t \in (0, \infty)$. Wynika stąd

Własność 2.12 Dla $l \geq m$ odpowiedź impulsowa $k(t)$ zawiera impuls Diraca lub jego pochodne i jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na otwartej półprostej $(0, \infty)$.

Przechodząc do odpowiedzi skokowej, dla $l > m$ możemy napisać

$$\frac{1}{s}K(s) = \frac{P(s)}{sM(s)} = \frac{N(s)}{sM(s)} + \sum_{i=0}^{l-m-1} b_i s^i,$$

gdzie $P(s)$ jest wielomianem o stopniu nie wyższym niż m , skąd wynika, że $\lambda(t) = \varphi(t) + \phi(t)$, gdzie $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{P(s)/M(s)\}$ oraz $\phi(t) = \sum_{i=0}^{l-m-1} b_i \delta^{(i)}(t)$. Korzystając z własności A.1, wnioskujemy, że $\varphi(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną na półprostej domkniętej $t \in [0, \infty)$. Z kolei $\psi(t) = 0$ dla $t \in (0, \infty)$. Wynika stąd

Własność 2.13 Dla $l > m$ odpowiedź skokowa $\lambda(t)$ zawiera impuls Diraca lub jego pochodne i jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na otwartej półprostej $(0, \infty)$.

Rozdział 3

Człony dynamiczne

Omówimy teraz charakterystyki prostych systemów nazywanych członami lub elementami dynamicznymi.

3.1 Człon proporcjonalny

Człon o transmitancji

$$K(s) = \kappa$$

nazywa się proporcjonalny, a κ jest jego wzmocnieniem. Jego równanie różniczkowe

$$y(t) = \kappa u(t)$$

jest zerowego rzędu. Odpowiedzią skokową jest

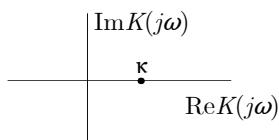
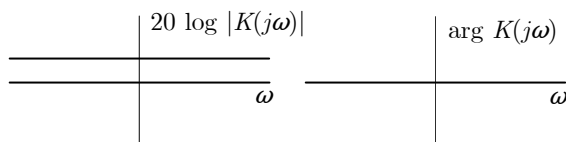
$$\lambda(t) = \kappa \delta(t),$$

a impulsową

$$k(t) = \kappa 1(t).$$

Należy zwrócić uwagę na to, że odpowiedź na skok jest także skokiem, co oznacza, że człon ten nie ma w istocie żadnej dynamiki. Krzywa $y = \kappa u$ jest oczywiście jego charakterystyką statyczną.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest po prostu punktem, patrz rys. 3.1. Charakterystyki logarytmiczne, rys. 3.2, cechują się tym, że ani wzmocnienie amplitudowe, ani faza nie zależą od częstotliwości. Dla dodatniego κ faza jest równa 0, dla ujemnego $-\pi$.

Rys. 3.1. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu proporcjonalnego, $\kappa > 0$ Rys. 3.2. Charakterystyki logarytmiczne członu proporcjonalnego, $\kappa > 1$

3.2 Człony inercyjne

Człon inercyjny pierwszego rzędu

Człon o transmitancji

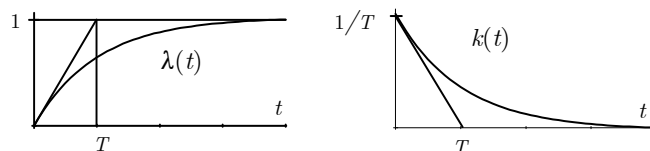
$$K(s) = \frac{1}{Ts + 1},$$

gdzie $T > 0$, nazywa się inercyjnym pierwszego rzędu, a T jest jego stałą czasową.

Odpowiedź skokową

$$\lambda(t) = 1 - e^{-t/T}$$

pokazano na rys. 3.3. Ustala się ona na poziomie 1, a prosta, styczna do niej w punkcie $t = 0$, osiąga go dla $t = T$. Zatem im większe T , tym wolniej ta odpowiedź narasta. Na tym samym rysunku przedstawiono także odpowiedź



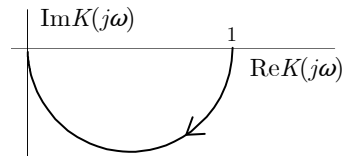
Rys. 3.3. Odpowiedź skokowa i impulsowa członu inercyjnego

impulsową

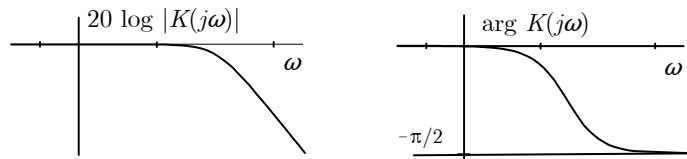
$$k(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}.$$

Im większe T , tzn. im większa inercja, tym wolniej opada ona do zera.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa pokazana na rys. 3.4 jest półokręgiem i mieści się w jednej ćwiartce płaszczyzny. Charakterystyki logarytmiczne przedstawiono na rys. 3.5. Zauważmy, że faza zmienia się od zera do $-\pi/2$.



Rys. 3.4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego



Rys. 3.5. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego

Człon inercyjny drugiego rzędu

Łącząc szeregowo dwa człony inercyjne, otrzymuje się człon inercyjny drugiego rzędu o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

gdzie $T_1 > 0$, $T_2 > 0$.

Dla $T_1 \neq T_2$, odpowiedź skokowa jest równa

$$\lambda(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2},$$

natomiast impulsową jest

$$k(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}).$$

Dla $T_1 = T_2 = T$, wyrażają się one wzorami

$$\lambda(t) = 1 - (t/T + 1)e^{-t/T},$$

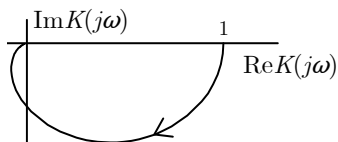
$$k(t) = (t/T^2)e^{-t/T}.$$

W obydwu przypadkach $k(0) = 0$, natomiast $k'(0) > 0$. Przykładowe odpowiedzi pokazano na rys. 3.6.

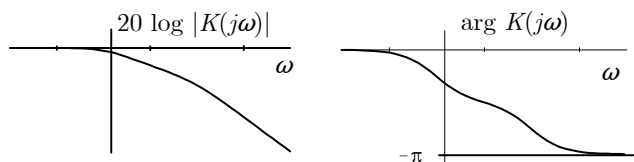


Rys. 3.6. Odpowiedź skokowa i impulsowa członu inercyjnego drugiego rzędu

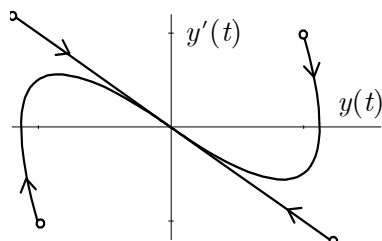
Charakterystyka amplitudowo-fazowa przedstawiona na rys. 3.7 przechodzi przez dwie ćwiartki płaszczyzny. Na rys. 3.8 pokazano charakterystyki logarytmiczne. Zwróćmy uwagę na to, że faza maleje od zera do $-\pi$. Trajektorie fazowe przedstawia natomiast rys. 3.9.



Rys. 3.7. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego drugiego rzędu



Rys. 3.8. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego drugiego rzędu



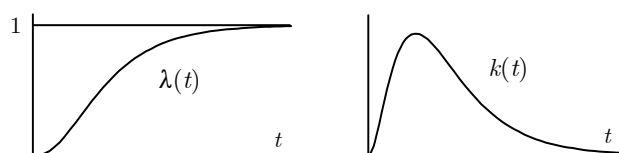
Rys. 3.9. Trajektorie fazowe członu inercyjnego drugiego rzędu

Człony inercyjne wyższych rzędów

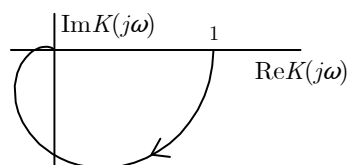
System o transmitancji

$$K(s) = \frac{1}{(T_1s + 1) \cdots (T_ns + 1)},$$

gdzie $T_1, \dots, T_n > 0$, nazywa się inercyjnym rzędu n . Odpowiedź skokowa, rys. 3.10, ustala się na poziomie 1, a jej $n-1$ pochodnych jest równych 0 w punkcie $t = 0$ i dopiero $k^{(n)}(0) > 0$. Zatem im większe n , tym wolniejsze narastanie odpowiedzi. Charakterystyka amplitudowo-fazowa przechodzi przez n ćwiartek wykresu. Dla $n = 3$, jej przykład pokazano na rys. 3.11.



Rys. 3.10. Odpowiedź skokowa i impulsowa członu inercyjnego trzeciego rzędu



Rys. 3.11. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego trzeciego rzędu

3.3 Człon oscylacyjny

Człon o transmitancji

$$K(s) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2},$$

gdzie $\sigma > 0$, $\omega \neq 0$, nazywa się oscylacyjnym. Transmitancja ta ma parę sprzężonych biegunów zespolonych, a mianowicie $s_1 = -\sigma + j\omega$ i $s_2 = -\sigma - j\omega$, $\sigma > 0$, $\omega > 0$. Człon ten nie może zatem powstać przez połączenie szeregowo dwóch członów inercyjnych.

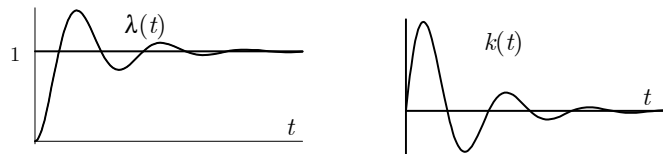
Odpowiedź skokowa to

$$\lambda(t) = 1 - \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

gdzie $\varphi = \arccos(\omega/\sqrt{\sigma^2 + \omega^2})$, a impulsowa

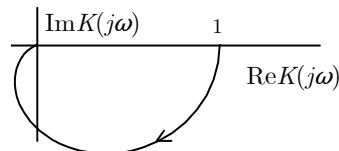
$$k(t) = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} e^{-\sigma t} \sin \omega t.$$

Pokazano je na rys. 3.12. Zespolone bieguny transmitancji są przyczyną oscylacji występujących w odpowiedzi impulsowej i skokowej.

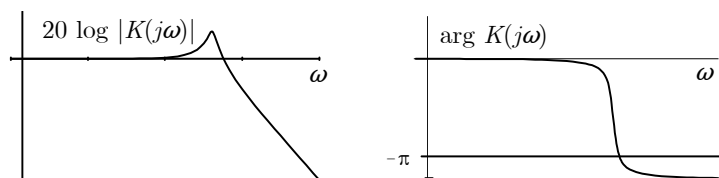


Rys. 3.12. Odpowiedź skokowa i impulsowa członu oscylacyjnego

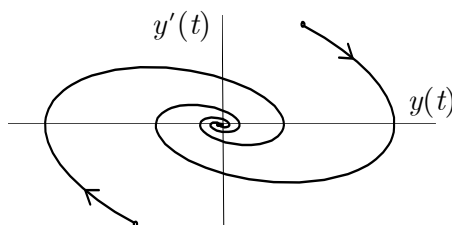
Charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawiono na rys. 3.13, charakterystyki logarytmiczne na rys. 3.14, a trajektorie fazowe na rys. 3.15.



Rys. 3.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu oscylacyjnego



Rys. 3.14. Charakterystyki logarytmiczne członu oscylacyjnego



Rys. 3.15. Trajektorie fazowe członu oscylacyjnego

3.4 Człony całkujące

Człon całkujący

Człon całkujący ma transmitancję

$$K(s) = \frac{1}{s}.$$

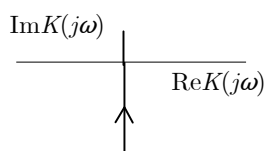
Jego odpowiedzią impulsową jest

$$k(t) = 1(t),$$

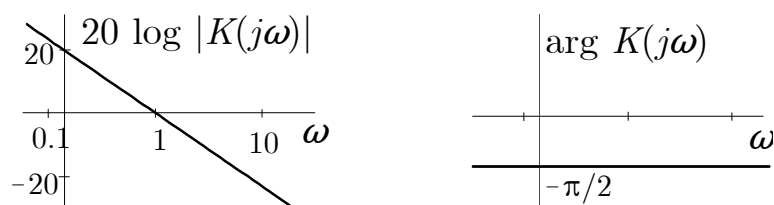
a skokową

$$\lambda(t) = t.$$

Charakterystyki częstotliwościowe pokazano na rys. 3.16 oraz 3.17. Opóźnienie fazowe równe $-\pi/2$ nie zależy od pulsacji, a wzmocnienie maleje o 20 decybeli na dekadę.



Rys. 3.16. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego



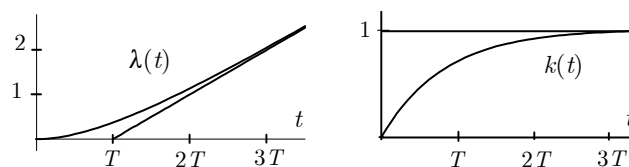
Rys. 3.17. Charakterystyki logarytmiczne członu całkującego

Człon całkujący z inercją

Człon całkujący z inercją ma transmitancję

$$K(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)},$$

przy czym $T > 0$. Można powiedzieć, że powstał on przez szeregowe połączenie elementu całkującego i inercyjnego.



Rys. 3.18. Odpowiedź skokowa i impulsowa członu całkującego z inercją

Jego odpowiedź impulsowa

$$k(t) = 1 - e^{-t/T}$$

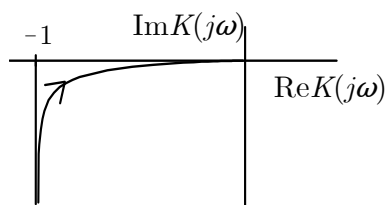
jest taka jak odpowiedź skokowa członu inercyjnego. Odpowiedź skokową wy-

rażającą się wzorem

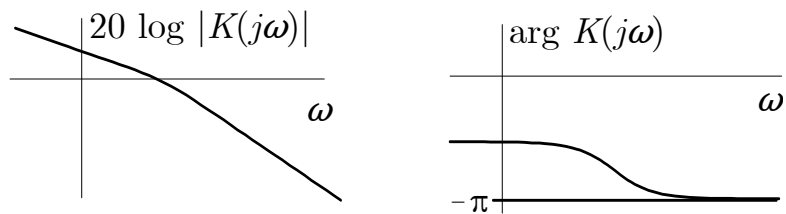
$$\lambda(t) = t - T(1 - e^{-t/T})$$

i jej asymptotę pokazano na rys. 3.18.

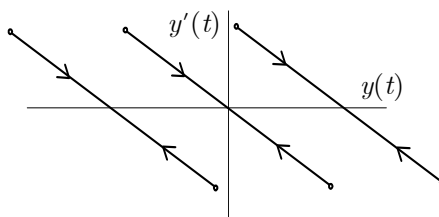
Charakterystykę amplitudowo-fazową przedstawiono na rys. 3.19, natomiast charakterystyki logarytmiczne na rys. 3.20. Zauważmy, że przesunięcie fazowe zmienia się od $-\pi/2$ do $-\pi$. Trajektorie fazowe pokazano na rys. 3.21.



Rys. 3.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego z inercją



Rys. 3.20. Charakterystyki logarytmiczne członu całkującego z inercją



Rys. 3.21. Trajektorie fazowe członu całkującego z inercją

3.5 Człony różniczkujące

Człon różniczkujący

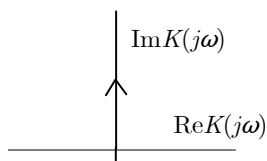
Człon o transmitancji

$$K(s) = s$$

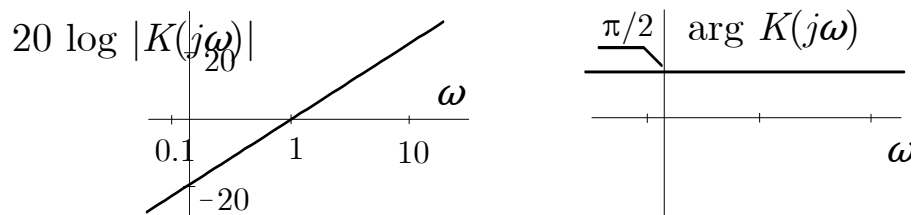
nazywa się różniczkującym. Jego odpowiedź skokowa to

$$\lambda(t) = \delta(t).$$

Odpowiednie charakterystyki częstotliwościowe pokazane są na kolejnych rysunkach, patrz rys. 3.22 i rys. 3.23. Zwracamy uwagę, że wzmocnienie wzrasta wraz z pulsacją w tempie 20 decybeli na dekadę. Przesunięcie fazowe jest równe $\pi/2$ i nie zależy od pulsacji.



Rys. 3.22. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu różniczkującego



Rys. 3.23. Charakterystyki logarytmiczne członu różniczkującego

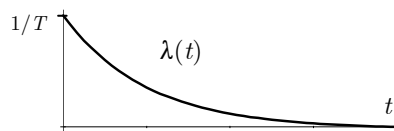
Człon różniczkujący z inercją

Człon o transmitancji

$$K(s) = \frac{s}{T_s + 1},$$

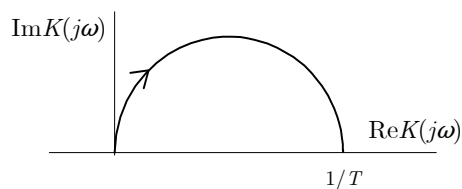
$T > 0$, nazywa się różniczkującym z inercją. Można uważać, że jest powstał przez szeregowe połączenie członu różniczkującego i inercyjnego. Jego odpowiedź skokowa jest więc taka sama jak impulsowa członu inercyjnego, czyli jest równa, patrz rys. 3.24,

$$\lambda(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}.$$

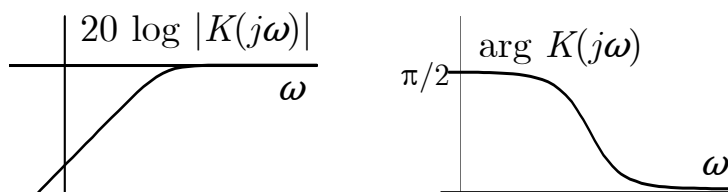


Rys. 3.24. Odpowiedź skokowa członu różniczkującego z inercją

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest półokręgiem, rys. 3.25. Charakterystyki logarytmiczne przedstawia rys. 3.26.



Rys. 3.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu różniczkującego z inercją



Rys. 3.26. Charakterystyki logarytmiczne członu różniczkującego z inercją

3.6 Przybliżone charakterystyki logarytmiczne

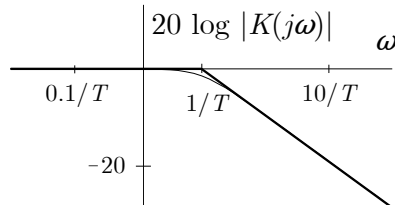
Zauważmy, że logarytmiczne charakterystyki amplitudowe członu proporcjonalnego, różniczkującego i całkującego są liniami prostymi i z tego powodu łatwo je narysować. Okazuje się, że, bez popełnienia dużego błędu, charakterystyki innych członów można aproksymować półprostymi lub odcinkami. Otrzymuje się w ten sposób tzw. charakterystyki przybliżone.

Zacniemy od członu inercyjnego, którego transmitancją jest jak wiadomo $K(s) = 1/(s + 1)$. Zatem $K(j\omega) = 1/(j\omega T + 1)$ jest transmitancją widmową. Wynika stąd, że

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

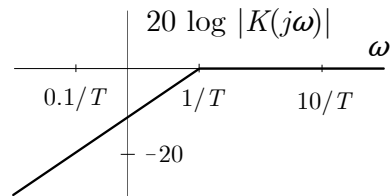
Dla $\omega T \ll 1$, czyli dla $\omega \ll 1/T$, mamy więc $1 + \omega^2 T^2 \approx 1$. Zatem $|K(j\omega)| \approx 1$, czyli $20 \log |K(j\omega)| \approx 0$. Dla $1 \ll \omega T$, czyli $1/T \ll \omega$, natomiast $1 + \omega^2 T^2 \approx \omega^2 T^2$, skąd wynika, że $|K(j\omega)| \approx 1/\omega T$. Dla ω w tym zakresie znajdujemy $20 \log |K(j\omega)| \approx -\log \omega T$.

Powyższe rozumowanie prowadzi do przybliżonej logarytmicznej charakterystyki amplitudowej przedstawionej na rys. 3.27. Zauważmy, że w przedziale $\omega \in [1/T, \infty)$ charakterystyka ta opada z szybkością 20dB na dekadę. Cienką linią pokazano charakterystykę dokładną.



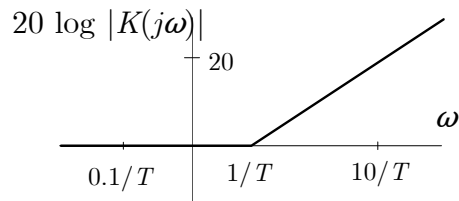
Rys. 3.27. Przybliżona logarytmiczna charakterystyka amplitudowa członu inercyjnego

Ćwiczenie 3.1 *Sprawdzić, że przybliżona charakterystyka amplitudowa członu o transmitancji $s/(Ts + 1)$, czyli członu różniczkującego z inercją ma kształt jak na rys. 3.28 oraz, że dla $\omega \in (-\infty, 1/T]$ wznosi się ona z szybkością 20dB na dekadę.*



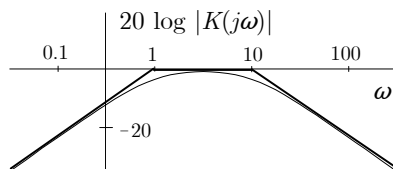
Rys. 3.28. Przybliżona logarytmiczna charakterystyka amplitudowa członu różniczkującego z inercją, ćwiczenie 3.1

Ćwiczenie 3.2 Sprawdzić, że przybliżona charakterystyka amplitudowa członu o transmitancji $Ts + 1$ ma kształt jak na rys. 3.29. Podać jej związek z charakterystyką członu $1/(Ts + 1)$.



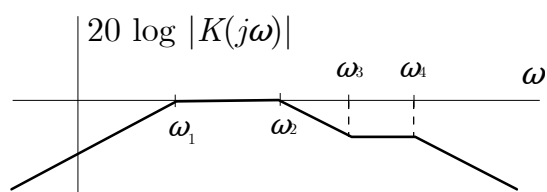
Rys. 3.29. Przybliżona charakterystyka amplitudowa członu $sT + 1$, ćwiczenie 3.2

Ćwiczenie 3.3 Sprawdzić, że przybliżona charakterystyka amplitudowa systemu o transmitancji $s/(0.1s+1)(s+1)$ – jako suma przybliżonych charakterystyk członów o transmitancjach s , $1/(0.1s + 1)$ oraz $1/(s + 1)$ – ma kształt jak na rys. 3.30. Cienką linią zaznaczono charakterystykę dokładną.



Rys. 3.30. Przybliżona charakterystyka amplitudowa, ćwiczenie 3.3

Ćwiczenie 3.4 Wyznaczyć transmitancję systemu o przybliżonej amplitudowej charakterystyce logarytmicznej jak na rys. 3.31. Nachylenie poszczególnych odcinków jest równe 0 lub $\pm 20\text{dB}$ na dekadę.



Rys. 3.31. Przybliżona charakterystyka logarytmiczna, ćwiczenie 3.4

Rozdział 4

Stabilność

Stabilność jest jedną z najważniejszych własności, której wymaga się od systemów dynamicznych. W szczególności muszą ją mieć systemy automatycznej regulacji. Poznamy teraz definicję oraz własności systemów stabilnych.

4.1 Definicja

Przypominamy, że system o równaniu różniczkowym (2.1), s. 12, ma transmitancję

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $M(s)$ i $L(s)$ są wielomianami jak we wzorach (2.3) i (2.4), czyli gdzie

$$M(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0$$

jest wielomianem charakterystycznym. Przy zerowym pobudzeniu, tzn. takim, że $u(t) = 0$ dla $t \geq 0$, zachowanie systemu opisywane jest przez jednorodne równanie różniczkowe

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0. \quad (4.1)$$

Jego warunkiem początkowym jest $y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$. Przez

$$s_1, s_2, \dots, s_m$$

oznaczamy pierwiastki wielomianu charakterystycznego, czyli bieguny transmitancji $K(s)$. Podamy teraz definicję stabilności.

Definicja 4.1 *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

to system nazywamy stabilnym.

Systemy, które nie są stabilne nazywamy niestabilnymi. Wśród niestabilnych wyróżnia się pewną klasę systemów, o których się mówi, że są na granicy stabilności.

Definicja 4.2 *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |y(t)| < \infty,$$

to mówimy, że system jest na granicy stabilności.

Na mocy definicji zatem w systemach stabilnych wyjście systemu zdąża do zera dla każdego warunku początkowego, natomiast w systemach na granicy stabilności jest ono ograniczone. Pobudzenie jest przy tym zerowe.

4.2 Twierdzenie o stabilności

O związku pomiędzy stabilnością i transmitancją orzeka poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 (stabilność) *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \operatorname{Re} s_2 < 0, \dots, \operatorname{Re} s_m < 0. \quad (4.2)$$

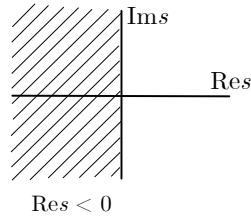
Można zatem powiedzieć, że system jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny liczb zespolonych, patrz rys. 4.1.

Aby wykazać prawdziwość tego ważnego twierdzenia podamy najpierw pewien lemat. Zauważmy, że obustronne przekształcenie Laplace'a równania różniczkowego (4.1) pozwala napisać, że

$$Y(s) = \frac{W(s)}{M(s)}. \quad (4.3)$$

Jest przy tym oczywiste, że współczynniki wielomianu

$$W(s) = w_{m-1}s^{m-1} + w_{m-2}s^{m-2} + \dots + w_1s + w_0 \quad (4.4)$$



Rys. 4.1. Lewa półpłaszczyzna liczb zespolonych

zależą od warunku początkowego oraz a_0, \dots, a_m . Poniższy lemat mówi, że można je kształtować dowolnie poprzez odpowiedni dobór warunku początkowego.

Lemat 4.1 (o warunku początkowym) *Dla każdego wielomianu $W_0(s)$ stopnia $m - 1$ (czyli dowolnych jego współczynników) istnieje warunek początkowy taki, że $W(s) \equiv W_0(s)$.*

Dowód. Jak łatwo zauważyć:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_1 y(0) + a_2 y^{(1)}(0) + \dots + a_{m-1} y^{(m-2)}(0) + a_m y^{(m-1)}(0), \\ w_1 &= a_2 y(0) + a_3 y^{(1)}(0) + \dots + a_m y^{(m-2)}(0), \\ &\vdots \\ w_{m-2} &= a_{m-1} y(0) + a_m y^{(1)}(0), \\ w_{m-1} &= a_m y(0). \end{aligned}$$

Oznaczając przez $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}]^T$ wektor współczynników wielomianu $W(s)$, wektor $\mathbf{y}(0) = [y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0)]^T$ oraz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_m & \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{m-1} & a_m & & & & \\ a_m & & & & & \end{bmatrix},$$

możemy więc napisać $\mathbf{w} = \mathbf{P}\mathbf{y}(0)$. Ponieważ $\det \mathbf{P} = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^m \neq 0$, dla każdego zadanego wektora \mathbf{w}_0 współczynników wielomianu $W_0(s)$ istnieje

więc wektor $\mathbf{y}(0)$ warunku początkowego taki, że $\mathbf{y}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}_0$. Dowód został więc zakończony. ■

Dzięki lematowi 4.1 możemy teraz udowodnić twierdzenie 4.1, które wiąże stabilność z biegunami transmitancji.

Dowód twierdzenia 4.1.

Wystarczalność warunku (4.2). Na mocy twierdzenia A.3, s. 213, z zależności (4.3) wynika, że, dla biegunów transmitancji oznaczonych jak w (2.9), s. 22, sygnał wyjściowy wyraża się wzorem

$$y(t) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(j-1)!} \alpha_{ij} t^{j-1} e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}),$$

gdzie α_{ij} , β_{ij} oraz φ_{ij} są pewnymi liczbami zależnymi od warunku początkowego. Ponieważ (4.2) oznacza, że

$$\xi_1 < 0, \dots, \xi_p < 0; \sigma_1 < 0, \dots, \sigma_q < 0, \quad (4.5)$$

(4.2) pociąga więc za sobą zbieżność do zera każdego ze składników powyższej sumy. Zatem, dla każdego zestawu współczynników α_{ij} oraz β_{ij} , czyli każdego warunku początkowego, zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. System jest więc stabilny.

Konieczność warunku (4.2). Załóżmy, że system jest stabilny. Przypuśćmy najpierw, że s_1 jest biegunem rzeczywistym. Z wykazanego lematu 4.1 wynika, że istnieje warunek początkowy taki, że $W(s) = a_m \prod_{i=2}^m (s - s_i)$. Ponieważ $M(s) = a_m \prod_{i=1}^m (s - s_i)$, zatem dla warunku tego

$$\frac{W(s)}{M(s)} = \frac{1}{s - s_1},$$

czyli $y(t) = e^{s_1 t}$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, więc $s_1 < 0$, czyli $\operatorname{Re} s_1 < 0$.

Weźmy teraz pod uwagę parę sprzężonych biegunów zespolonych, powiedzmy (s_1, s_2) , gdzie $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ i $s_2 = \sigma_1 - j\omega_1$. Z lematu 4.1 wynika istnienie warunku początkowego, dla którego $W(s) = a_m \omega_1 \prod_{i=3}^m (s - s_i)$. Dla warunku tego

$$\frac{W(s)}{M(s)} = \frac{\omega_1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{\omega_1}{(s - \sigma_1)^2 + \omega_1^2},$$

skąd wynika, że $y(t) = e^{\sigma_1 t} \sin \omega_1 t$. Zatem $\sigma_1 < 0$, czyli $\operatorname{Re} s_1 < 0$ i $\operatorname{Re} s_2 < 0$.

Ponieważ powyższa argumentacja ma zastosowanie wobec każdego bieguna rzeczywistego i każdej pary biegunów zespolonych, wykazaliśmy więc, że ze stabilności wynika (4.2), co kończy dowód. ■

Następne twierdzenie orzeka o relacji pomiędzy granicą stabilności i transmitancją.

Twierdzenie 4.2 (granica stabilności) *System jest na granicy stabilności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\operatorname{Re} s_1 \leq 0, \operatorname{Re} s_2 \leq 0, \dots, \operatorname{Re} s_m \leq 0,$$

przy czym bieguny transmitancji, dla których zachodzą równości, są co najwyżej jednokrotne.

Dowód. Dowód jest podobny do rozumowania, które uzasadnia twierdzenie 4.1 i dlatego ograniczymy się do zwrócenia uwagi na różnice. Zauważmy, że biegun rzeczywisty $\xi_1 = 0$ o krotności k wnosi do reakcji systemu składową proporcjonalną do t^{k-1} . Podobnie para pierwiastków urojonych ($\eta_1 = j\omega_1, \bar{\eta}_1 = -j\omega_1$) o krotności k wnosi składową $t^{k-1} \cos(\omega_1 t + \varphi_{11})$. W obydwu przypadkach, dla $k = 1$ odpowiednia składowa odpowiedzi jest ograniczona, natomiast nie jest ona ograniczona dla $k \geq 2$. ■

Uwaga 4.1 *Należy zwrócić uwagę na to, że systemy stabilne są niekiedy nazywane asymptotycznie stabilnymi. O systemach na granicy stabilności mówi się wtedy, że są stabilne. Pozostałe są niestabilnymi.*

4.3 Własności systemów stabilnych

Zbadamy teraz własności systemów stabilnych. Omówimy ich reakcję na standardowe wymuszenia, czyli impuls Diraca $\delta(t)$, skok jednostkowy $1(t)$ oraz sinusoidę $\sin \omega t$.

4.3.1 Odpowiedź impulsowa

Własność 4.1 *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0. \quad (4.6)$$

Dowód. Z uwagi na twierdzenie 4.1, wystarczy wykazać, że (4.6) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny transmitancji leżą w lewej półpłaszczyźnie, tzn. gdy zachodzi (4.5). To, że z (4.5) wynika (4.6) jest oczywiste. Wystarczy zatem wykazać odwrotną implikację.

Przypuśćmy zatem, że zachodzi (4.6). Załóżmy najpierw, że $l < m$, co oznacza, że odpowiedź impulsowa jest jak we wzorze (2.10), s. 23. Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że transmitacja ma jedynie bieguny rzeczywiste ξ_1 i ξ_2 , różne, o krotnościach k_1 i k_2 . Zatem

$$k(t) = \sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_1 t} + \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_{2j} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_2 t},$$

przy czym $\alpha_{1k_1} \neq 0$ i $\alpha_{2k_2} \neq 0$, co wynika z własności 2.3, s. 22. Przypuśćmy, że $\xi_1 \geq 0$. Oznacza to, że $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\xi_1 t} \neq 0$, przy czym granica może być równa ∞ . Skoro zachodzi przy tym (4.6), to jest tak, że $\alpha_{1k_1} = -\alpha_{2k_1}$, $k_1 = k_2$ oraz $\xi_1 = \xi_2$. Wynika stąd, że bieguny ξ_1 i ξ_2 są identyczne. Ponieważ doszliśmy do sprzeczności, musi być tak, że $\xi_1 < 0$. Powtarzając to rozumowanie wobec pozostałych biegunów rzeczywistych dochodzimy do wniosku, że wszystkie są ujemne. Podobne argumenty można powtórzyć wobec biegunów zespolonych ustalając, że ujemne są ich części rzeczywiste. Zatem (4.6) implikuje (4.5). Wykazaliśmy więc, że, dla $l < m$, teza jest prawdziwa. Ponieważ dla $l \geq m$ rozumowanie przebiega podobnie, dowód został więc zakończony. ■

Ćwiczenie 4.1 Niech system będzie stabilny i niech $\rho = \max_i (\operatorname{Re} s_i)$. Wykazać, że:

- ◁ $|k(t)| \leq c_1 e^{\rho t}$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
- ◁ $|k(t)| \leq c_2 t^{m-1} e^{\rho t} \leq c_3 e^{(\rho+\varepsilon)t}$, pewne c_2, c_3 oraz dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Własność 4.2 Niech $l < m$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_0^{\infty} |k(t)| dt < \infty. \quad (4.7)$$

Dowód. To, że stabilność, tzn. (4.2), pociąga za sobą (4.7) wynika z ćwiczenia 4.1 i tego, że $\rho < 0$. W celu wykazania przeciwnej implikacji wystarczy powtórzyć argumenty z dowodu własności 4.1. ■

Poniższa własność, którą wykorzystamy w rozdziale 7 jest oczywista.

Własność 4.3 Niech $l < m$. W systemie stabilnym $\max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| < \infty$.

Ćwiczenie 4.2 Niech system będzie stabilny i niech $u(t)$ będzie ograniczone. Wykazać, że jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ także. Ponadto, jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

4.3.2 Odpowiedź skokowa

Własność 4.4 Niech $l < m$. W systemie stabilnym o biegunach oznaczonych jak w (2.9), s.22, odpowiedź skokowa jest równa

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & K(0) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |d_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie c_{ij} , d_{ij} i φ_{ij} są jak we własności 2.8, s. 26.

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 2.8 i uwzględnić to, że transmittancja $K(s)$ nie ma bieguna w punkcie $s = 0$. ■

Ważnym pojęciem jest tzw. wzmocnienie w stanie ustalonym. Podaje je poniższa definicja.

Definicja 4.3 Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ istnieje, to nazywamy ją wzmocnieniem systemu w stanie ustalonym.

O istnieniu tego wzmocnienia orzeka poniższa własność.

Własność 4.5 Granica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \quad (4.9)$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny. Ponadto, w systemie takim wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe

$$K(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \int_0^{\infty} k(t) dt. \quad (4.10)$$

Dowód. Punktem wyjściowym dowodu jest (4.8). Argumentując jak w dowodzie własności 4.1 wykazujemy, że stabilność jest równoważna z (4.9). Równość (4.10) jest oczywista. ■

Widzimy więc, że tylko systemy stabilne mają charakterystykę statyczną, tzn. charakterystykę wiążącą wysokość skoku na wejściu z poziomem, na

którym ustala się odpowiedź systemu. Jest nią prosta $y = K(0)u$. Współczynnikiem wzmocnienia w stanie ustalonym jest więc $K(0)$.

Wśród systemów stabilnych są takie, w których $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$. Ma to miejsce, gdy $L(0) = 0$, czyli $b_0 = 0$. Ponieważ w systemie takim $K(0) = 0$, jego współczynnik wzmocnienia w stanie ustalonym jest więc równy 0.

Ćwiczenie 4.3 Niech system będzie stabilny i niech $u(t)$ będzie ograniczone. Jeśli $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \neq 0$, to

$$K(0) = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)}.$$

Ćwiczenie 4.4 Niech system będzie stabilny i niech $\rho = \max_i (\operatorname{Re} s_i)$. Oznaczając $\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$, wykazać, że:

- $\triangleleft |\lambda(t) - \lambda_\infty| \leq c_1 e^{\rho t}$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
- $\triangleleft |\lambda(t) - \lambda_\infty| \leq c_2 e^{(\rho + \varepsilon)t}$, pewne c_2 i dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Ćwiczenie 4.5 Niech system będzie stabilny i niech $u(t) = 1(t)$. Podać transmitancję systemu, w którym $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Ćwiczenie 4.6 Niech system będzie stabilny i niech $u(t) = t$. Podać transmitancję systemu, w którym $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Ćwiczenie 4.7 Niech system będzie stabilny i niech $u(t) = t^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Wykazać, że jeśli $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-p} K(s) = 0$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

4.3.3 Transmitancja widmowa

Odpowiedź na pobudzenie sinusoidalne

Dotychczas badaliśmy reakcję systemu na dwa standardowe pobudzenia, a mianowicie impuls Diraca i skok jednostkowy. Teraz zajmiemy się odpowiedzią systemu stabilnego na pobudzenie sinusoidalne.

Załóżmy, że warunek początkowy jest dowolny, natomiast $u(t) = \sin \omega t$ dla $t \in [0, \infty)$. Ponieważ $\sin \omega t \hat{=} \omega / (s^2 + \omega^2)$, a zatem

$$Y(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} K(s) + \frac{W(s)}{M(s)},$$

gdzie, podobnie jak w (4.3), $W(s)$ jest wielomianem stopnia nie wyższego niż $m - 1$ pochodzącym od warunku początkowego. Ponieważ $K(s) = L(s)/M(s)$,

zatem z twierdzenia A.1 o rozkładzie, s. 210, wynika, że

$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} K(s) = \frac{\alpha(\omega)}{s - j\omega} + \frac{\bar{\alpha}(\omega)}{s + j\omega} + \frac{R(s)}{M(s)},$$

gdzie, jak łatwo sprawdzić, $2\alpha(\omega) = -jK(j\omega)$, natomiast $R(s)$ jest pewnym wielomianem. Skorzystanie z (A.7), s. 202, prowadzi do wniosku, że

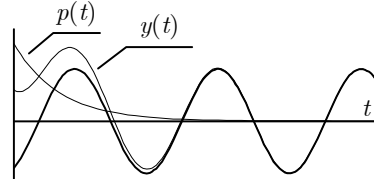
$$y(t) = |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) + p(t),$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(j\omega)$ i $p(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{R(s)/M(s)\} + \mathfrak{L}^{-1}\{W(s)/M(s)\}$.

Ponieważ system jest stabilny, zatem wszystkie pierwiastki wielomianu $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie. Korzystając więc z lematu A.3, s. 221, zauważamy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$. Z tego też powodu $p(t)$ nazywa się składową przejściową odpowiedzi. Druga składowa będąca sinusoidą o stałej amplitudzie nazywa się ustalona. Dla dużych t składowa przejściowa jest bliska zeru i dlatego sygnał na wyjściu jest w przybliżeniu równy składowej ustalonej, tzn.

$$y(t) \approx |K(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Przykładową odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne pokazano na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne.
Składową ustaloną zaznaczono grubszą linią

O składowej ustalonej odpowiedzi na pobudzenie $u(t) = \sin \omega t$ można zatem stwierdzić, że:

- ▶ jest ona sinusoidą o tej samej pulsacji co pobudzenie,
- ▶ jej amplituda zależy od ω i jest równa $|K(j\omega)|$,
- ▶ przesunięcie fazowe zależy od ω i jest równe $\arg K(j\omega)$.

Należy zwrócić uwagę na to, że składowa ustalona jest sinusoidą o tej samej częstotliwości co sinusoida na wejściu. W związku z tym mówi się, że system liniowy nie wprowadza zniekształceń częstotliwościowych. Cecha ta odróżnia

systemy liniowe od nieliniowych. W tych ostatnich reakcja na sinusoidę zawiera bowiem wyższe harmoniczne, czyli składowe typu $\sin(n\omega t)$, $n = 2, 3, \dots$, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 4.1 *W nieliniowym systemie bez dynamiki o charakterystyce $y = \phi(u)$ określonej wzorem*

$$\phi(u) = \begin{cases} -1, & \text{dla } u < 0 \\ 1, & \text{dla } u \geq 0, \end{cases}$$

reakcją na wymuszenie $u(t) = \sin(\omega t)$ jest sygnał periodyczny. Jego rozwinięcie w szereg Fouriera ma następującą postać: $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$, gdzie $a_n = (1/\pi n)[1 - (-1)^n]$. Reakcja ta zawiera wyższe harmoniczne.

Przykład 4.2 *Niech teraz $u(t)$ będzie sygnałem periodycznym, tzn. niech $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$. Jest oczywiste, że odpowiedź systemu stabilnego ma postać: $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) + p(t)$, gdzie $b_n = a_n |K(j\omega n)|$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$. Jeśli zatem pobudzenie jest periodyczne, to odpowiedź w stanie ustalonym także jest periodyczna.*

Odpowiedź impulsowa i skokowa

Niech teraz $l < m$. Ponieważ dla systemu stabilnego zachodzi (4.7), a więc istnieje $\int_0^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt$. Zatem

$$\tilde{K}(\omega) = K(j\omega),$$

gdzie $\tilde{K}(\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej, patrz § A.6. Podamy teraz związki między transmitancją widmową a odpowiedzią impulsową i skokową.

Własność 4.6 *Niech $l < m$. W systemie stabilnym*

$$\operatorname{Re} K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) \cos(\omega t) dt,$$

$$\operatorname{Im} K(j\omega) = - \int_0^{\infty} k(t) \sin(\omega t) dt.$$

Dowód. Dzięki własności 4.2 transformaty Fouriera odpowiedzi impulsowej, czyli $\int_0^\infty k(t)e^{-j\omega t}dt$, istnieje. Ponieważ $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$, więc

$$\tilde{K}(\omega) = \int_0^\infty k(t) \cos(\omega t) dt - j \int_0^\infty k(t) \sin(\omega t) dt,$$

co kończy dowód. ■

Własność 4.7 Niech $l < m$. W systemie stabilnym

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[K(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}[K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Dla dowodu wystarczy powołać się na własność A.3, s. 230. ■

Z wzoru Parsewala (A.30), s. 229, wynika następująca własność:

Własność 4.8 Niech $l < m$. W systemie stabilnym

$$\int_0^\infty k^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Przejdziemy teraz do odpowiedzi skokowej.

Własność 4.9 Niech $l < m$. W systemie stabilnym, dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Re}[K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega \\ &= K(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}[K(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = K(0)$. Jest więc oczywiste, że $\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$, gdzie $g(t) = \lambda(t) - K(0)$, co oznacza, że funkcja $g(t)$ ma transformatę Fouriera. Zatem, z własności A.3, s. 230, wynika, że

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}[G(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega,$$

gdzie $G(s) = s^{-1}(K(s) - K(0))$ jest transformatą Laplace'a funkcji $g(t)$. Ponieważ $G(j\omega) = (j\omega)^{-1}[K(j\omega) - K(0)]$, więc $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\omega^{-1} \operatorname{Re} K(j\omega) + \omega^{-1}K(0)$. Zatem

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Re}[K(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega - K(0) \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) d\omega.$$

Uwzględniając to, że $\int_0^\infty \omega^{-1} \sin(\omega t) d\omega = \pi/2$ wykazujemy, iż prawdziwa jest pierwsza równość tezy.

Z własności A.3 wynika ponadto, że

$$g(t) = (2/\pi) \int_0^\infty \operatorname{Re}[G(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega.$$

Ponieważ $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = -\omega^{-1} \operatorname{Im} K(j\omega)$, zatem także druga część tezy została zweryfikowana. ■

Ćwiczenie 4.8 Niech $l < m$. Oznaczając $\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$, wykazać, że dla systemu stabilnego

$$\begin{aligned} \lambda(t) - \lambda_\infty &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} (\operatorname{Re}[K(j\omega)] - K(0)) \sin(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}[K(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \end{aligned}$$

oraz

$$\int_0^\infty (\lambda(t) - \lambda_\infty)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} |K(j\omega) - K(0)|^2 d\omega.$$

4.3.4 Równanie fazowe

Wektor $\xi^* \in R^m$ nazywa się punktem równowagi systemu, jeśli, przy warunku początkowym $\xi(0) = \xi^*$, rozwiązaniem równania fazowego (patrz § 2.7, s. 33) jest $\xi(t) = \xi^*$. Mówiąc inaczej, ξ^* jest punktem równowagi, jeśli trajektoria rozpoczynająca się w tym punkcie nie opuszcza go. Ponieważ $\dot{\xi}(t) = \mathbf{0}$ wzdłuż takiej trajektorii, każdy wektor ξ rozwiązujący równanie $\mathbf{0} = \mathbf{A}\xi$ jest więc punktem równowagi. Jest oczywiste, że każdy system liniowy ma przynajmniej taki jeden punkt, a mianowicie $\xi^* = \mathbf{0}$.

Jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to $\xi^* = \mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$, tzn. jedynym punktem równowagi systemu. Ponieważ $\det \mathbf{A} = -a_0$, ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \neq 0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy transmitancja systemu nie ma bieguna w punkcie $s = 0$.

Jeśli natomiast $a_0 = 0$, to $\det \mathbf{A} = 0$ i system ma także inne punkty równowagi, ponieważ równanie $\mathbf{0} = \mathbf{A}\xi$ ma wtedy wiele rozwiązań. Aby je wyznaczyć przypomnijmy, że dla trajektorii pozostającej w punkcie równowagi ξ^* zachodzi równość $\dot{\xi}(t) = \mathbf{0}$. Z definicji wektora fazowego wynika zatem, że dla trajektorii tej $y^{(1)}(t) = \dots = y^{(m-1)}(t) = 0$. Oznaczając $\xi^* = [\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_m^*]$, dochodzimy więc do wniosku, że $\xi_2^* = \dots = \xi_m^* = 0$. Wynika stąd, że zbiór

punktów równowagi pokrywa się teraz z osią ξ_1 , tzn. osią $y(t)$ przestrzeni fazowej.

Wykazaliśmy więc, że równanie fazowe ma przynajmniej jeden punkt równowagi $\xi = \mathbf{0}$. Jest on jedyny wtedy i tylko wtedy, gdy transmitancja nie ma bieguna w punkcie $s = 0$, czyli gdy system nie ma własności całkujących. Jeśli ma taki biegun, to równanie fazowe ma nieskończenie wiele punktów równowagi. Ich zbiór pokrywa się z osią $y(t)$.

Definicja 4.4 *Równanie fazowe nazywa się stabilnym, jeśli, dla każdego $\xi(0)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \mathbf{0}.$$

Równanie fazowe nazywa się więc stabilnym, gdy każda jego trajektoria zbiega się do punktu równowagi $\xi^* = \mathbf{0}$. Ponieważ $\xi(t) = e^{\mathbf{A}t}\xi(0)$, równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}.$$

W tym miejscu powołamy się na rezultat z teorii stabilności, patrz [8], według którego ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ macierzy \mathbf{A} , tzn. pierwiastki wielomianu $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, są takie, że

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_m < 0. \quad (4.11)$$

Ponieważ, dla $a_m = 1$, wielomiany charakterystyczne macierzy \mathbf{A} i transmitancji są identyczne, patrz własność 2.11, s. 34. Dochodzimy w ten sposób do kolejnej własności.

Własność 4.10 *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego równanie fazowe jest stabilne.*

Ćwiczenie 4.9 *Wykazać, że jeśli dla macierzy \mathbf{A} określonej wzorem (2.13), patrz s. 33, zachodzą nierówności (4.11), to $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$.*

Wskazówka. Skorzystać z tego, że $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = [1/\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})] \operatorname{adj} \mathbf{A}$.

4.3.5 Ograniczone wejście – ograniczone wyjście

Poniżej wykażemy, że jeśli pobudzenie jest ograniczone, to reakcja systemu stabilnego także. Ograniczoność obydwu sygnałów jest rozumiana tak samo, przy czym albo w sensie ograniczenia co do modułu, albo co do całki z modułu, albo też całki z kwadratu.

Własność 4.11 Niech $l < m$. Niech system będzie stabilny i niech warunek początkowy będzie zerowy. Wówczas

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |y(t)| \leq c \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|$$

oraz

$$\int_0^\infty |y(t)| dt \leq c \int_0^\infty |u(t)| dt,$$

gdzie $c = \int_0^\infty |k(t)| dt$.

Dowód. Ponieważ warunek początkowy jest zerowy, $y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau) d\tau$. Zatem $|y(t)| \leq c \sup_{t \in [0, \infty)} |u(t)|$, skąd wynika pierwsza z nierówności.

Aby wykazać drugą, oznaczmy $g(t) = \int_0^t |k(t-\tau)||u(\tau)| d\tau$. Na podstawie reguły o splocie, s. 198, wnioskujemy, że $G(s) = \mathfrak{L}\{|k(t)|\} \mathfrak{L}\{|u(t)|\}$, skąd wynika, że $s^{-1}G(s) = \mathfrak{L}\{|k(t)|\} s^{-1} \mathfrak{L}\{|u(t)|\}$. Dzięki temu możemy napisać, że $\int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t |k(t-\tau)| \varphi(\tau) d\tau$, gdzie $\varphi(t) = \int_0^t |u(\tau)| d\tau$. Ponieważ ponadto $|y(t)| \leq g(t)$, a zatem

$$\begin{aligned} \int_0^t |y(\tau)| d\tau &\leq \int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t |k(t-\tau)| \varphi(\tau) d\tau \\ &\leq c \sup_{t \in [0, \infty)} \varphi(t) \leq c \int_0^\infty |u(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Własność 4.12 Niech $l < m$. Niech system będzie stabilny i niech warunek początkowy będzie zerowy. Wówczas

$$\int_0^\infty y^2(t) dt \leq d^2 \int_0^\infty u^2(t) dt,$$

gdzie $d = \max_{\omega \in [0, \infty)} |K(j\omega)|$.

Dowód. Najpierw wykażemy, że $d < \infty$. Zaczniemy od oczywistej równości $d = V + W$, gdzie $V = \sup_{\omega \in [0, \rho)} |K(j\omega)|$, $W = \sup_{\omega \in [\rho, \infty)} |K(j\omega)|$, natomiast ρ jest dowolną, dodatnią liczbą. Ponieważ żaden biegun transmitancji $K(s)$ nie leży na osi liczb urojonych, więc $V < \infty$. Z uwagi na to, że $l < m$, ma miejsce zbieżność $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K(j\omega)| = 0$, skąd wynika, że $W < \infty$. Zatem $|K(j\omega)|$ jest funkcją ograniczoną dla $\omega \in [0, \infty)$ i malejącą do zera. Pamiętając, że jest ona także ciągła, stwierdzamy w rezultacie, iż $\max_{\omega \in [0, \infty)} |K(j\omega)| < \infty$.

Ponieważ $Y(j\omega) = K(j\omega)U(j\omega)$, zatem $|Y(j\omega)|^2 \leq d^2 |U(j\omega)|^2$. Dowód kończymy wykorzystując wzór Parsewala (A.30), s. 229. ■

Przykład 4.3 Niech $K(s) = 1/(s+1)$. Ponieważ $k(t) = e^{-t}$, $\int_0^\infty |k(t)|dt = 1$. Zatem $c = 1$. Ponadto $|K(j\omega)| = 1/(1 + \omega^2)^{1/2}$, skąd wynika, że $d = 1$.

Przykład 4.4 Dla $K(s) = 1/M(s)$, gdzie $M(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0$, znajdujemy

$$d^2 = \frac{1}{\min_{\omega \in [0, \infty)} |M(j\omega)|^2} = \frac{1}{a_0^2}.$$

Przykład 4.5 Z ostatniego przykładu wynika, że dla $K(s) = 7/(2s+3)(4s+5)$ mamy $d^2 = 7/15$.

Posługując się pojęciem normy funkcji, otrzymane powyżej własności 4.11 i 4.12 można zapisać jednym wzorem. Oznaczając poszczególne normy jako $\|x(t)\|_1 = \sup_{t \in [0, \infty)} |x(t)|$, $\|x(t)\|_2 = \int_0^\infty |x(t)|dt$, $\|x(t)\|_3 = (\int_0^\infty x^2(t)dt)^{1/2}$, możemy bowiem napisać

$$\|y(t)\|_i \leq \gamma_i \|u(t)\|_i, \quad (4.12)$$

gdzie $\gamma_1 = \gamma_2 = c$ oraz $\gamma_3 = d$.

Iloraz

$$\frac{\|y(t)\|}{\|u(t)\|},$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest dowolną normą, można traktować jako swoiście rozumiane wzmocnienie systemu. Z nierówności (4.12) wynika, że w systemach stabilnych, dla wymienionych trzech norm, jest ono skończone.

W szczególności, $\int_0^\infty x^2(t)dt$ interpretuje się jako energię sygnału $x(t)$. Traktując więc

$$\frac{\int_0^\infty y^2(t)dt}{\int_0^\infty u^2(t)dt}$$

jako wzmocnienie energii, możemy zatem stwierdzić, że w systemach stabilnych jest ono skończone i ograniczone przez d^2 .

Ćwiczenie 4.10 Niech $l < m$. Niech system będzie stabilny i niech warunek początkowy będzie zerowy. Wykazać, że, dla każdego T prawdziwe są nierówności $\int_0^T y^2(t)dt \leq d^2 \int_0^T u^2(t)dt$ oraz $\int_0^T |y(t)|dt \leq c \int_0^T |u(t)|dt$.

4.4 Własności systemów niestabilnych

Omówimy teraz własności systemów niestabilnych, w tym tych, które są na granicy stabilności.

Własność 4.13 *Niech system będzie na granicy stabilności. Dla $l < m$*

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |k(t)| < \infty,$$

natomiast dla $l \geq m$

$$\sup_{t \in (0, \infty)} |k(t)| < \infty.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 4.2, transmitancja systemu ma bieguny w lewej półpłaszczyźnie, a ponadto:

- jeden biegun rzeczywisty, powiedzmy s_1 , taki, że $s_1 = 0$, lub
- jedną parę biegunów urojonych, powiedzmy $(\eta_1, \bar{\eta}_1)$, taką, że $\eta_1 = j\omega_1$, $\omega_1 \neq 0$.

W pierwszej sytuacji w odpowiedzi impulsowej (2.10) występuje składowa stała, w drugiej składowa typu $\cos \omega_1 t$. Ponieważ składniki pochodzące od pozostałych biegunów zbiegają się do zera gdy $t \rightarrow \infty$, w każdym z tych przypadków odpowiedź impulsowa jest więc ograniczona na całej półprostej $[0, \infty)$.

Jak wiemy, dla $l \geq m$ odpowiedź impulsowa zawiera jeszcze impuls Diraca oraz jego pochodne, tzn. $\delta^{(p)}(t)$, $p = 0, 1, \dots, l - m$. Fakt ten, w połączeniu z powyższą argumentacją, prowadzi do wniosku, że odpowiedź impulsowa jest ograniczona na otwartej półprostej $(0, \infty)$, co kończy dowód. ■

O odpowiedzi impulsowej i skokowej systemu niestabilnego nie będącego na granicy stabilności wypowiada się kolejna własność.

Własność 4.14 *W systemie niestabilnym nie będącym na granicy stabilności*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |k(t)| = \infty$$

oraz

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\lambda(t)| = \infty.$$

Rozdział 5

Kryteria stabilności

Zgodnie z twierdzeniem 4.1, s. 58, aby stwierdzić, czy system o transmitancji

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (5.1)$$

jest stabilny, wystarczy rozwiązać jego równanie charakterystyczne $M(s) = 0$, gdzie, co przypominamy,

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

a następnie sprawdzić, czy wyznaczone w ten sposób pierwiastki mają ujemne części rzeczywiste. Rozwiązanie równania jest możliwe tylko dla $m \leq 4$, tzn. tylko wtedy można znaleźć jego pierwiastki przy użyciu takich działań jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz pierwiastkowanie. Równań wyższych stopni, poza szczególnymi przypadkami, rozwiązać nie można.

Powstaje zatem pytanie, czy bez rozwiązywania równania charakterystycznego można stwierdzić, czy wszystkie jego rozwiązania leżą w lewej półpłaszczyźnie? Odpowiedź jest pozytywna. Twierdzenia, które ustalają związek między współczynnikami wielomianu charakterystycznego, a tym, czy spełniony jest zestaw nierówności (4.2) nazywają się kryteriami stabilności.

Najpierw omówimy kryteria algebraiczne. Twierdzenie 5.1 o współczynnikach podaje warunek konieczny, kryterium Routha–Hurwitza określa warunek wystarczający. Z kolei kryterium Hurwitza, podobnie jak Liénarda–Chiparta, ustala warunek konieczny i wystarczający. Pozostałe, tzn. Michajłowa oraz Nyquista są kryteriami częstotliwościowymi. Każde z nich podaje warunek konieczny i wystarczający.

5.1 Systemy o dowolnej strukturze

5.1.1 Twierdzenie o współczynnikach

Zacniemy od prostego kryterium podającego warunek konieczny.

Twierdzenie 5.1 (o współczynnikach) *Niech $a_m > 0$. Jeśli system (5.1) jest stabilny, to*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0. \quad (5.2)$$

Innymi słowy, jeśli warunek (5.2) nie jest spełniony, to system (5.1) nie jest stabilny.

Dowód. Wielomian $M(s)$ ma pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy ξ_1, \dots, ξ_p , oraz pary zespolone, powiedzmy $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, co oznacza, że $p + 2q = m$. Jest więc oczywiste, że

$$M(s) = a_m \prod_{i=1}^p (s - \xi_i) \prod_{j=1}^q (s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j).$$

Skoro system jest stabilny, to wszystkie ξ_i są ujemne. Wynika stąd, że wszystkie współczynniki wielomianu $\prod_{i=1}^p (s - \xi_i)$ są dodatnie.

Oznaczając $\eta_j = \sigma_j + j\omega_j$ zauważmy, że $(s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j) = (s - \sigma_j)^2 + \omega_j^2$. Ponieważ $\sigma_j < 0$, wszystkie współczynniki tego dwumianu są zatem dodatnie. W rezultacie wszystkie są dodatnie także w wielomianie $\prod_{j=1}^q (s - \eta_j)(s - \bar{\eta}_j)$, co kończy dowód. ■

Przykład 5.1 *System, którego transmitancja ma wielomian charakterystyczny $s^2 + 1 = (s - j)(s + j)$ nie jest stabilny, ponieważ $a_1 = 0$.*

Przykład 5.2 *Wielomian $s^3 + s^2 - s - 1$ ma przynajmniej jeden pierwiastek poza lewą półpłaszczyzną, ponieważ $a_1 < 0$ i $a_0 < 0$. Rzeczywiście, wielomian ten to $(s - 1)(s + 1)^2$.*

Przykład 5.3 *O stabilności systemu mającego wielomian charakterystyczny $s^2 + s + 1$, twierdzenie 5.1 nie rozstrzyga.*

Kończąc zwracamy uwagę na to, że – w pewnych sytuacjach – omawiane kryterium pozwala stwierdzić, że system jest niestabilny. Nigdy natomiast nie doprowadza do wniosku, że system jest stabilny. Jest to spowodowane tym, że podaje ono warunek konieczny.

5.1.2 Kryterium Routha–Hurwitza

Poniżej podamy kryterium, które podaje wystarczający warunek stabilności. Wprowadzimy w tym celu macierz Hurwitza \mathbf{H}_m o m wierszach i m kolumnach zdefiniowaną następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m &= \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & a_{m-7} & \cdots \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & a_{m-6} & \cdots \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \cdots \\ 0 & a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ \cdots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ \cdots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ \cdots & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na główną przekątną i indeksy w poszczególnych kolumnach. Niech teraz $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ będą głównymi podwyznacznikami tej macierzy, tzn. niech

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{m-1}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_m = \det \mathbf{H}_m. \end{aligned}$$

Rozwijając Δ_m względem ostatniej kolumny zauważamy, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$.

Przykład 5.4 Dla wielomianu $a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ piszemy

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} a_4 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

i zauważamy, że $\Delta_4 = a_0 \Delta_3$.

Przykład 5.5 Dla wielomianu $6s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 3s + 2$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -44 \text{ oraz } \Delta_4 = 2(-44) = 88.$$

Ponadto, dla wielomianu $M(s)$ niech m_+ będzie liczbą jego pierwiastków leżących w prawej półpłaszczyźnie, tzn. posiadających dodatnią część rzeczywistą. Dla ciągu liczbowego $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, niech $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ oznacza liczbę zmian znaku jego kolejnych elementów. Dla przykładu zatem, $V(5, -2, 4, -1) = 3$, $V(1, -3, 4, 1) = 2$, $V(2, 3, 5, -1) = 1$, $V(1, 5, 2, 3) = 0$. Podamy teraz kryterium Routha–Hurwitza.

Twierdzenie 5.2 (Routh–Hurwitz) *Jeśli*

$$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_m \neq 0, \quad (5.3)$$

to żaden z pierwiastków wielomianu $M(s)$ nie leży na osi $j\omega$ oraz

$$m_+ = V\left(a_m, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}\right).$$

Twierdzenie to, nazywane kryterium Routha–Hurwitza, patrz np. [8], podajemy bez dowodu, gdyż wymagałby on dłuższych rozważań. Warto jeszcze zauważyć, że sporo wysiłku związanego z obliczeniem Δ_m oszczędzi się, gdy weźmie się pod uwagę to, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$. Z twierdzenia powyższego wynika oczywisty wniosek.

Wniosek 5.1 *Niech $a_m > 0$. Jeśli*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0, \quad (5.4)$$

to system jest stabilny.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $a_m > 0$ oraz (5.4) prowadzą do wniosku, że żaden z pierwiastków nie leży na osi $j\omega$ i $m_+ = 0$. Wszystkie pierwiastki leżą zatem w lewej półpłaszczyźnie. ■

Kryterium Hurwitza, które podajemy w następnej części stwierdza, że (5.4) jest nie tylko warunkiem wystarczającym, lecz także koniecznym.

Ćwiczenie 5.1 Korzystając z wzoru Orlando¹

$$\Delta_{m-1} = (-1)^{m(m-1)/2} a_m^{m-1} \prod_{i=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j < i}}^m (s_i + s_j)$$

oraz równości $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$ wykazać, że jeśli $M(s)$ ma pierwiastek (rzeczywisty lub parę czysto urojony) na osi $j\omega$, to (5.3) nie zachodzi (co jest częścią twierdzenia Routha–Hurwitza). Na przykładzie wielomianu $s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$ zauważyć następnie, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Ćwiczenie 5.2 Korzystając z wzoru Orlando, patrz ćwiczenie 5.1, podać wielomian o niezerowych pierwiastkach rzeczywistych, dla którego $\Delta_{m-1} = 0$, czyli dla którego (5.3) nie zachodzi.

Przykład 5.6 Dla $M(s) = (s+2)(s+3)^2 = s^3 + 8s^2 + 21s + 18$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 0 \\ 1 & 21 & 0 \\ 0 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

oraz $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 150$, $\Delta_3 = 1200$. Ponieważ

$$m_+ = V \left(1, 8, \frac{150}{8}, \frac{1200}{150} \right) = 0,$$

a więc wielomian ten ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie. System jest stabilny.

Przykład 5.7 Niech $M(s) = (s-1)^2(s+2)(s+3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6$. Zatem

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

¹P. Lancaster, *Theory of Matrices*. Academic Press, New York 1969.

i $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -40$, $\Delta_4 = -240$. Ostatecznie

$$m_+ = V\left(1, 3, -\frac{2}{3}, \frac{40}{2}, \frac{240}{40}\right) = 2.$$

Wielomian $M(s)$ nie ma więc żadnego pierwiastka na osi $j\omega$, dwa w prawej półpłaszczyźnie oraz dwa w lewej. System jest zatem niestabilny.

Przykład 5.8 Dla transmitancji $1/(s^2 + 2)(s + 3) = 1/(s^3 + 3s^2 + 2s + 6)$ wyliczamy $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 0$ oraz $\Delta_3 = 0$. Ponieważ wśród wyznaczników jest zerowy, zatem kryterium nie wypowiada się na temat stabilności systemu.

Przykład 5.9 Dla wielomianu $(s^2 + 1)(s^2 + 3s + 1) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + 1$ znajdujemy $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$. Wśród wyznaczników jest zerowy, bowiem para pierwiastków $(j, -j)$ czysto urojonych leży na osi $j\omega$.

Przykład 5.10 Niech $M(s) = s(s + 1)^2 = s^3 + 2s^2 + s$. W wielomianie tym $a_0 = 0$ i dlatego jeden z jego pierwiastków rzeczywistych, tzn. $s = 0$, leży na osi $j\omega$. Pozostałe znajdują się poza osią. Ponieważ $\Delta_3 = a_0\Delta_2$, więc pierwiastek w zerze jest przyczyną tego, że $\Delta_3 = 0$.

Kryterium Routha-Hurwitza jest skutecznym narzędziem wtedy, gdy wszystkie podwyznaczniki macierzy Hurwitza są różne od zera. Pozwala ono wówczas w sposób jednoznaczny określić, czy system jest stabilny, czy nie. W sytuacji, gdy przynajmniej jeden z nich jest zerowy, kryterium zawodzi.

Warto zwrócić uwagę na to, że kryterium to pozwala określić liczbę biegunów transmitancji położonych w prawej półpłaszczyźnie, co może być pomocne przy stosowaniu kryterium Nyquista, patrz § 5.2.2.

5.1.3 Kryterium Hurwitza

Poniższe twierdzenie, znane jako kryterium Hurwitza, patrz np. [8], podaje konieczny i wystarczający warunek stabilności.

Twierdzenie 5.3 (Hurwitz) Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0. \quad (5.5)$$

Przypominamy, że we wniosku 5.1, który bezpośrednio wynika z kryterium Routha-Hurwitza, ustaliliśmy, że warunek (5.5) jest wystarczający. Powyższe kryterium Hurwitza stwierdza, że warunek ten jest także konieczny.

Przykład 5.11 *Niech*

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

Macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 18$, $\Delta_3 = 36$. System jest zatem stabilny.

Przykład 5.12 *System o transmitancji*

$$K(s) = \frac{1}{s^3 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$$

nie jest stabilny, gdyż

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$ oraz $\Delta_3 = -2$.

Przykład 5.13 *Niech teraz*

$$K(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}.$$

Macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 36$, $\Delta_3 = 180$. Wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego leżą więc w lewej półpłaszczyźnie.

Z uwagi na to, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$, z twierdzenia 5.1 o współczynnikach wielomianu charakterystycznego i twierdzenia 5.3 Hurwitza wynika poniższy, praktyczny wniosek:

Wniosek 5.2 *Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0$$

oraz

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0.$$

System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności (5.2) oraz (5.5). Jest bowiem oczywiste, że z twierdzeń 5.1 i 5.3 wynika, że zestaw wszystkich nierówności w (5.2) i (5.5) tworzy łącznie warunek konieczny i wystarczający. Procedura sprawdzania stabilności, o której mówi powyższy wniosek jest szybsza od tej, którą wskazuje twierdzenie 5.3. Dla przykładu, brak stabilności systemu w przykładzie 5.12 stwierdza się teraz natychmiast, ponieważ $a_2 = 0$ i $a_1 < 0$. Nie ma więc potrzeby obliczania wyznaczników.

Przykład 5.14 Dla systemu o transmitancji $1/(s^2 + a_1s + a_0)$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Jest on zatem stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$ i $a_1 > 0$.

Przykład 5.15 Dla systemu o transmitancji $1/(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)$ macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

System ten jest zatem stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ oraz $a_1a_2 - a_0 > 0$.

Jeszcze większe oszczędności obliczeniowe możemy uzyskać, stosując kryterium Liénarda–Chiparta, patrz np. [8].

Twierdzenie 5.4 (Liénard–Chipart) Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 > 0$ oraz spełniony jest dowolny z czterech poniższych warunków:

- (1) $a_2 > 0, a_4 > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- (2) $a_2 > 0, a_4 > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$
- (3) $a_1 > 0, a_3 > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- (4) $a_1 > 0, a_3 > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$

Z kryterium Liénarda–Chiparta i twierdzenia 5.3 wynikają następujące dwa praktyczne wnioski:

Wniosek 5.3 Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0, \\ \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots \end{aligned}$$

Wniosek 5.4 Niech $a_m > 0$. System (5.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_{m-1} > 0, \\ \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots \end{aligned}$$

Wnioski orzekają, że wystarczy sprawdzać jedynie co drugi wyznacznik, czyli tylko te o wskaźnikach parzystych lub tylko nieparzystych.

Przykład 5.16 Dla wielomianu $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 2s + 3$ stwierdzamy, że $\Delta_1 = 2$, $\Delta_3 = 6$, $\Delta_5 = -9$ oraz $\Delta_2 = 2$, $\Delta_4 = -3$. To, że system jest niestabilny można więc ustalić, sprawdzając jedynie znaki wyznaczników o parzystych lub nieparzystych indeksach.

Ćwiczenie 5.3 Odwołując się do wzoru Orlando, patrz ćwiczenie 5.1, oraz tego, że $\Delta_m = a_0 \Delta_{m-1}$, wykazać, że jeśli transmitancja systemu ma biegun na osi $j\omega$, to $\Delta_{m-1} = \Delta_m = 0$, co oznacza, że zarówno wśród wyznaczników o parzystych, jak i nieparzystych indeksach jest przynajmniej po jednym zerowym.

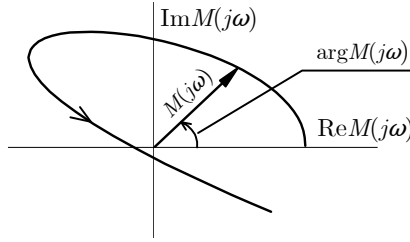
5.1.4 Kryterium Michajłowa

Kryterium Michajłowa, które omówimy poniżej zajmuje się, podobnie jak kryteria omówione wcześniej, mianownikiem transmitancji (5.1). Różnica polega na tym, że bada ono własności funkcji $M(j\omega) = M(s)|_{s=j\omega}$. W odróżnieniu od poznanych już kryteriów algebraicznych, poniższe ma zatem charakter częstotliwościowy.

W naszych rozważaniach w dalszym ciągu $a_m > 0$. Zbadamy teraz własności funkcji $M(j\omega)$, gdy ω zmienia się na domkniętej półprostej $[0, \infty)$. Jej graficzne przedstawienie nazywa się wykresem Michajłowa, co precyzuje poniższa definicja.

Definicja 5.1 Wykres funkcji $M(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyźnie liczb zespolonych nazywa się jej wykresem Michajłowa.

Zauważmy, że funkcja $M(j\omega)$ jest ciągła i jej wykres przecina każdą z osi współrzędnych nie więcej niż m razy (ponieważ żadne z równań $\text{Im } M(j\omega) = 0$ oraz $\text{Re } M(j\omega) = 0$ nie ma więcej niż m rozwiązań). Przykładowy wykres Michajłowa pokazano na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przykładowy wykres Michajłowa

Teraz zajmijmy się funkcją $\arg M(j\omega)$. Jak już wiemy, wielomian $M(s)$ ma m pierwiastków. Rzeczywiste oznaczmy jako ξ_1, \dots, ξ_p , a pary zespolone jako $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$. Jest przy tym oczywiste, że $p + 2q = m$. Ponieważ

$$M(s) = a_m \prod_{i=1}^p (s - \xi_i) \prod_{k=1}^q (s - \eta_k)(s - \bar{\eta}_k),$$

zatem

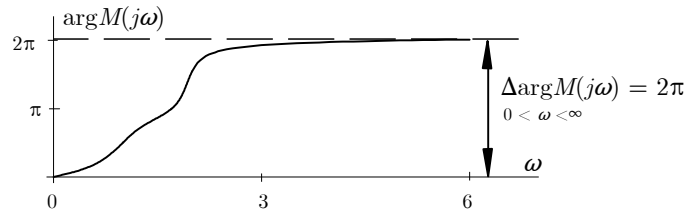
$$M(j\omega) = a_m \prod_{i=1}^p (j\omega - \xi_i) \prod_{k=1}^q (j\omega - \eta_k)(j\omega - \bar{\eta}_k).$$

Z uwagi na to, że $a_m > 0$, pamiętając, że liczbę zespoloną z można zapisać jako $z = |z|e^{j\varphi}$, gdzie $\varphi = \arg z$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \arg M(j\omega) &= \arg \left(\prod_{i=1}^p (j\omega - \xi_i) \prod_{k=1}^q (j\omega - \eta_k)(j\omega - \bar{\eta}_k) \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \arg(j\omega - \xi_i) + \sum_{k=1}^q \arg(j\omega - \eta_k)(j\omega - \bar{\eta}_k). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Jak za chwilę zauważymy, $\arg M(j\omega)$ może być funkcją ciągłą na półprostej $(0, \infty)$, lub nie. Jeśli jest, to definiujemy dla niej następujący funkcjonal:

$$\Delta \arg M(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg M(j\omega). \quad (5.7)$$

Rys. 5.2. Przykładowa funkcja $\arg M(j\omega)$

Przez $\omega \rightarrow 0+$ rozumiemy, że ω maleje do zera. Wielkość ta nazywa się przyrostem argumentu wielomianu $M(j\omega)$ na otwartej półprostej $(0, \infty)$. Przykład funkcji $\arg M(j\omega)$ pokazano na rys. 5.2. Zwróćmy uwagę na to, że wykres Michajłowa sporządza się dla $\omega \in [0, \infty)$, natomiast przyrost argumentu jest określony dla $\omega \in (0, \infty)$.

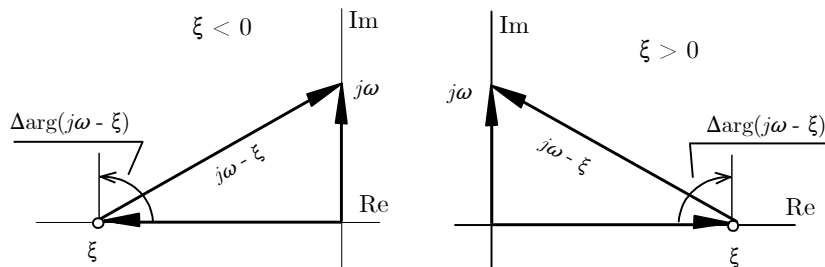
Rozpatrzmy teraz poszczególne składniki sum w (5.6). Zaczniemy od $\arg(j\omega - \xi)$, gdzie ξ jest rzeczywiste, a następnie przejdziemy do $\arg(j\omega - \eta)$ ($j\omega - \bar{\eta}$), gdzie η jest zespolone.

Pierwiastek rzeczywisty ξ , $\xi \neq 0$

Zauważmy, że teraz $\arg(j\omega - \xi)$ jest funkcją ciągłą na półprostej $[0, \infty)$, patrz rys. 5.3, na którym wektor $j\omega - \xi$ jest na nim pokazany z dokładnością do przesunięcia. Ponadto

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg(j\omega - \xi) = \begin{cases} \pi/2, & \text{dla } \xi < 0 \\ -\pi/2, & \text{dla } \xi > 0. \end{cases}$$

Wykres funkcji $j\omega - \xi$, $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przy tym przez punkt $s = 0$.

Rys. 5.3. $\Delta \arg(j\omega - \xi)$ dla $\omega \in (0, \infty)$, pierwiastek ξ rzeczywisty

Pierwiastek rzeczywisty ξ , $\xi = 0$

Dla $\xi = 0$, wartość $\arg(j\omega - \xi)$ nie jest określona dla $\omega = 0$ i równa $\pi/2$ dla $\omega \in (0, \infty)$. Zatem funkcja $\arg(j\omega - \xi)$ jest ciągła na otwartej półprostej $(0, \infty)$ oraz

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg(j\omega - \xi) = 0.$$

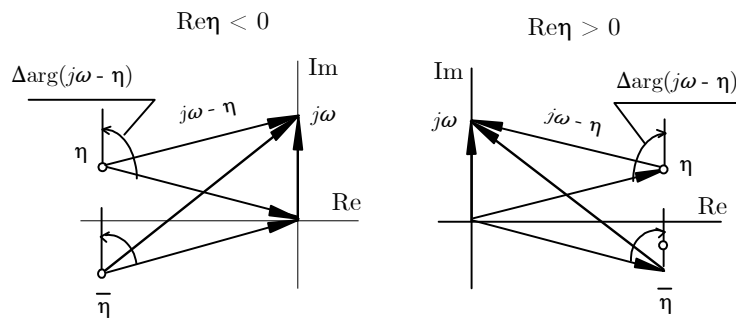
Zauważmy, że wykres funkcji $j\omega - \xi$ przechodzi przez punkt $s = 0$, co ma miejsce dla $\omega = 0$.

Para pierwiastków zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$

Ponieważ $\operatorname{Re} \eta \neq 0$ oraz $\operatorname{Im} \eta \neq 0$, zatem $\arg(j\omega - \eta) + \arg(j\omega - \bar{\eta})$ jest funkcją ciągłą na półprostej $[0, \infty)$. Ponadto, patrz rys. 5.4,

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg(j\omega - \eta) + \Delta_{0 < \omega < \infty} \arg(j\omega - \bar{\eta}) = \begin{cases} \pi, & \text{dla } \eta < 0 \\ -\pi, & \text{dla } \eta > 0 \end{cases}.$$

Wykres funkcji $(j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta})$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $s = 0$.



Rys. 5.4. $\Delta \arg(j\omega - \eta) + \Delta \arg(j\omega - \bar{\eta})$ dla $\omega \in (0, \infty)$, para pierwiastków zespolonych

Para pierwiastków urojonych $(\eta, \bar{\eta})$

Oznaczając $\eta = j\rho$, gdzie $\rho \neq 0$, zauważamy, że $\arg(j\omega - \eta) + \arg(j\omega - \bar{\eta})$ jest funkcją nieciągłą w punkcie $\omega = \rho$. Zatem funkcjonal (5.7) teraz nie istnieje. Ponadto wykres funkcji $(j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta})$ przechodzi przez punkt $s = 0$ (dla $\omega = \rho$).

Aby podsumować powyższe spostrzeżenia, oznaczmy przez m_- liczbę pierwiastków wielomianu $M(s)$ położonych w lewej półpłaszczyźnie; m_+ w dalszym ciągu jest ich liczbą w prawej. Dzięki temu możemy podać dwa następujące lematy.

Lemat 5.1 Niech $a_m > 0$. Wykres Michajłowa przechodzi przez punkt $s = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M(s)$ ma pierwiastek na osi $j\omega$.

Lemat 5.2 Niech $a_m > 0$. Jeśli wielomian $M(s)$ nie ma pierwiastków na osi $j\omega$, to

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Jesteśmy teraz w stanie podać kryterium Michajłowa, które określa konieczny i wystarczający warunek stabilności.

Twierdzenie 5.5 (Michajłow) Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = m \frac{\pi}{2} \quad (5.8)$$

i wykres Michajłowa nie przechodzi przez punkt $s = 0$.

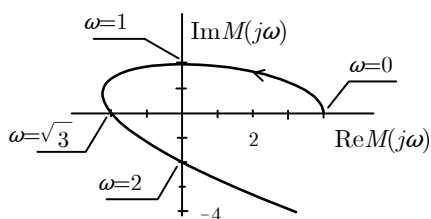
Dowód. *Konieczność.* Niech system będzie stabilny. Żaden pierwiastek wielomianu $M(s)$ nie leży zatem na osi $j\omega$, patrz twierdzenie 4.1, s. 58. Dzięki lematowi 5.1, wykres Michajłowa nie przechodzi więc przez punkt $s = 0$. Również (5.8) zachodzi, bowiem $m_+ = 0$ i $m_- = m$, patrz lemat 5.2. Stabilność implikuje więc (5.8) oraz to, że wykres nie przechodzi przez punkt $s = 0$.

Wystarczalność. Teraz zakładamy, że (5.8) zachodzi i wykres Michajłowa nie przechodzi przez punkt $s = 0$. Z drugiego z tych faktów i lematu 5.1 wynika, że $M(s)$ nie ma pierwiastków na osi $j\omega$. W związku z tym (5.8) i lemat 5.2 implikują to, że $m_- - m_+ = m$. Ponieważ $m_- + m_+ = m$, zatem $m_- = m$, co oznacza, że wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie. System jest więc stabilny. ■

Przykład 5.17 Dla wielomianu $M(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4$ otrzymujemy $M(j\omega) = (\omega^4 - 5\omega^2 + 4) + j(-\omega^3 + 3\omega)$. Zatem równanie $\operatorname{Re} M(j\omega) = 0$ ma następujące, nieujemne rozwiązania: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$. Jak łatwo sprawdzić, $\operatorname{Im} M(j\omega_1) = 2$ oraz $\operatorname{Im} M(j\omega_2) = -2$. Równanie $\operatorname{Im} M(j\omega) = 0$ ma także dwa nieujemne pierwiastki $\omega_3 = 0$ oraz $\omega_4 = \sqrt{3}$. Ponadto $\operatorname{Re} M(j\omega_3) = 4$, $\operatorname{Re} M(j\omega_4) = -2$. Na tej podstawie można sporządzić tabelę jak poniżej

ω	$\operatorname{Re} M(j\omega)$	$\operatorname{Im} M(j\omega)$
$\omega_3 = 0$	4	0
$\omega_1 = 1$	0	2
$\omega_4 = \sqrt{3}$	-2	0
$\omega_2 = 2$	0	-2

w której pierwiastki $\omega_1, \dots, \omega_4$ uszeregowane są w kolejności rosnącej. Dzięki niej łatwo sporządzmy wykres Michajłowa, rys. 5.5. Na jego podstawie stwierdzamy, że $\Delta \arg M(j\omega)_{0 < \omega < \infty} = 2\pi$. Zatem system jest stabilny.

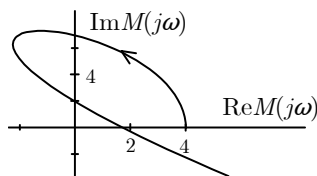


Rys. 5.5. Wykres Michajłowa, przykład 5.17

Kryterium Michajłowa podaje konieczny i wystarczający warunek stabilności. Różne sposoby jego niespełnienia prowadzą do odmiennych wniosków, a mianowicie:

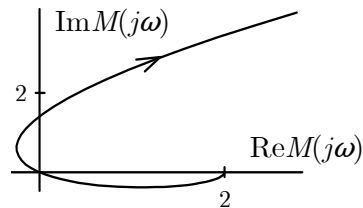
- W pierwszym, wykres nie przechodzi przez punkt $s = 0$ i nie zachodzi (5.8). W sytuacji takiej przynajmniej jeden biegun leży w prawej półpłaszczyźnie, skąd wniosek o niestabilności systemu.
- Drugi polega na tym, że wykres przechodzi przez punkt $s = 0$. Przynajmniej jeden biegun leży wówczas na osi $j\omega$. System jest więc niestabilny, może znajdować się jednak na granicy stabilności.

Przykład 5.18 Dla systemu $K(s) = 1 / (s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 9s + 4)$ wielomianem charakterystycznym jest oczywiście $M(s) = s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 9s + 4$. Postępując jak w przykładzie 5.17 dochodzimy do wykresu Michajłowa jak na rys. 5.6. Ponieważ $\Delta \arg M(j\omega)_{0 < \omega < \infty} = 0 \neq 2\pi$, więc system jest niestabilny.



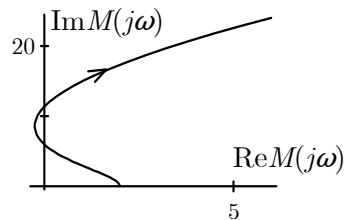
Rys. 5.6. Wykres Michajłowa, przykład 5.18

Przykład 5.19 Dla transmitancji $K(s) = 1/(s^4 - s^3 + 3s^2 - s + 2)$ wykres Michajłowa przedstawiono na rys. 5.7. Dla pulsacji $\omega = 1$ przechodzi on przez początek układu współrzędnych. Wynika stąd wniosek, że transmitancja ma parę biegunów urojonych. System nie jest zatem stabilny.



Rys. 5.7. Wykres Michajłowa, przykład 5.19

Przykład 5.20 Niech teraz $M(s) = s^4 - 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2$. Na podstawie wykresu Michajłowa, pokazanego na rys. 5.8, stwierdzamy, że $\Delta \arg M(j\omega)_{0 < \omega < \infty} = 0$. System nie jest więc stabilny.



Rys. 5.8. Wykres Michajłowa, przykład 5.20

5.2 Systemy ze sprzężeniem zwrotnym

5.2.1 Wstęp

System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym pokazany jest na rys. 5.9. Jak łatwo zauważyć,

$$Y(s) = K(s)W(s)$$

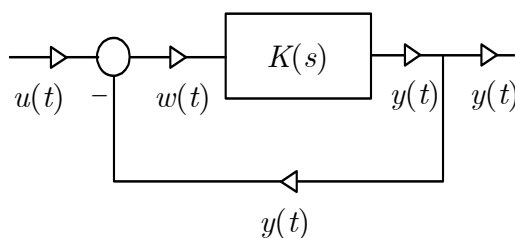
oraz

$$W(s) = U(s) - Y(s),$$

skąd wynika, że

$$K_Z(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)},$$

gdzie $K_Z(s) = Y(s)/U(s)$ jest transmitancją systemu o wejściu u i wyjściu y , czyli systemu zamkniętego.



Rys. 5.9. System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

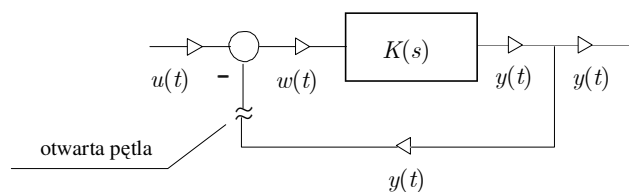
Na rysunku 5.10 przedstawiono ten sam system, lecz z tzw. otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, czyli system otwarty. Jego transmitancją jest

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

która z tego względu nazywa się transmitancją systemu otwartego. Zatem

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

jest wielomianem charakterystycznym systemu otwartego.



Rys. 5.10. System z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego

Ponieważ

$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)},$$

a więc $M_Z(s) = L(s) + M(s)$ jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego. Wykazaliśmy więc prawdziwość poniższej własności.

Własność 5.1 *Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest*

$$M_Z(s) = L(s) + M(s).$$

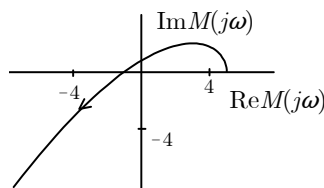
Własność powyższa pozwala wykorzystać kryteria Routha–Hurwitza, Hurwitza i Michajłowa do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym, co pokażemy na przykładach.

Przykład 5.21 *Niech $K(s) = 1/(s^3 + 2s^2 + 3s + 4)$. Z własności 5.1 wynika, że wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego jest równy $M_Z(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 5$. Jego macierz Hurwitza jest następująca:*

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Postępując zgodnie z kryterium Hurwitza stwierdzamy bez trudu, że system zamknięty jest stabilny.

Przykład 5.22 *Transmitancja systemu otwartego jest jak w przykładzie 5.21. Dla systemu zamkniętego wykres Michajłowa, tzn. wykres $M_Z(j\omega) = -j\omega^3 - 2\omega^2 + 3j\omega + 5$, wygląda jak na rys. 5.11. System jest zatem stabilny.*



Rys. 5.11. Wykres Michajłowa dla systemu zamkniętego, przykład 5.22

Ćwiczenie 5.4 *Niech $K(s) = (s + 1)/(s^3 + 2s^2 + 5)$. Sprawdzić, czy system zamknięty jest stabilny. Zastosować zarówno kryterium Hurwitza, jak i Michajłowa.*

5.2.2 Kryterium Nyquista

Przejdziemy teraz do kryterium Nyquista, które służy do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym. Omówimy kilka sytuacji w zależności od położenia biegunów transmitancji systemu otwartego. Zaczniemy od najprostszej, w której system otwarty jest stabilny, potem przejdziemy do przypadku, gdy jego transmitancja ma biegun w punkcie $s = 0$, tzn. ma własności całkujące. Następnie system otwarty będzie niestabilny. Zakończymy wreszcie zakładając, że jego transmitancja ma bieguny urojone. Kryterium podamy zatem w czterech wersjach. Każda z nich odpowiada przyjętym własnościom systemu otwartego.

Badanie stabilności systemu zamkniętego będziemy zaczynać od transmitancji $K(s) = L(s)/M(s)$ systemu otwartego, gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są, jak zwykle, wielomianami o stopniach l i m .

System otwarty stabilny

Będziemy teraz posługiwać się funkcjonalem $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega)$ zdefiniowanym wzorem (5.7), który określa przyrost argumentu wielomianu $M(j\omega)$ na otwartej półprostej $(0, \infty)$.

Twierdzenie 5.6 (Nyquist) *Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech system otwarty będzie stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0 \quad (5.9)$$

i wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Ponieważ system otwarty jest stabilny, a więc wszystkie pierwiastki wielomianu $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie, co oznacza, że $m_+ = 0, m_- = m$. Dzięki temu, że $a_m > 0$, z lematu 5.2 wynika więc, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega) = m \frac{\pi}{2}, \quad (5.10)$$

a z lematu 5.1 to, że

$$M(j\omega) \neq 0 \text{ dla } \omega \in [0, \infty). \quad (5.11)$$

Ostatnie jest bowiem równoznaczne z tym, że wykres $M(j\omega)$ nie przechodzi przez punkt $s = 0$.

Ponieważ $l < m$, a zatem stopień wielomianu $L(s) + M(s)$ jest równy m . Ponadto a_m jest współczynnikiem przy s^m . System zamknięty jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] = m \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

oraz

$$L(j\omega) + M(j\omega) \neq 0 \text{ dla } \omega \in [0, \infty). \quad (5.13)$$

Ostatnie jest oczywiście równoznaczne z tym, że wykres $L(j\omega) + M(j\omega)$ nie przechodzi przez punkt $s = 0$.

Przechodząc do właściwego dowodu zauważmy, że z równości

$$1 + K(j\omega) = \frac{L(j\omega) + M(j\omega)}{M(j\omega)} \quad (5.14)$$

wynika, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega),$$

co, po uwzględnieniu (5.10), doprowadza do wniosku, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [L(j\omega) + M(j\omega)] - m \frac{\pi}{2}. \quad (5.15)$$

Z uwagi na (5.14), (5.13) jest równoznaczne z tym, że $1 + K(j\omega) \neq 0$ dla $\omega \in [0, \infty)$, tzn. z tym, że wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Ponadto z (5.15) wynika, że (5.12) jest równoznaczne z równością (5.9).

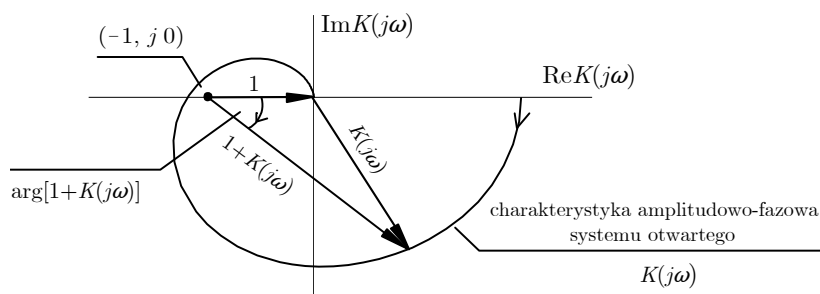
Wykazaliśmy więc, że (5.12)–(5.13), czyli stabilność systemu zamkniętego, jest równoważne z tym, że zachodzi (5.9) i wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$, co kończy dowód. ■

Weryfikacji warunku (5.9) najłatwiej można dokonać poprzez analizę wykresu $K(j\omega)$, czyli na podstawie badania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego, patrz rys. 5.12. W celu wyznaczenia

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)]$$

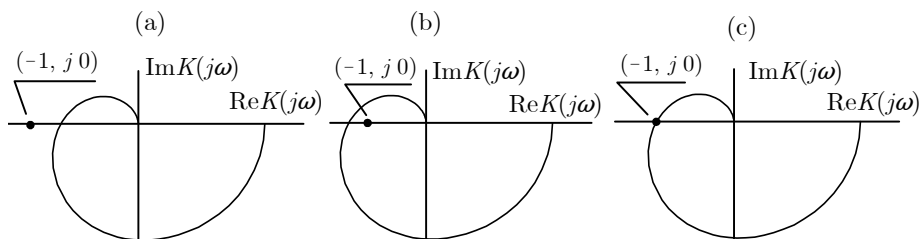
należy prześledzić zmiany zaznaczonego kąta przy zmieniającym się ω .

Na rys. 5.13 pokazano przykłady wzajemnego usytuowania charakterystyki amplitudowo-fazowej systemu otwartego, tzn. wykresu $K(j\omega)$, oraz punktu



Rys. 5.12. Geometryczna interpretacja kryterium Nyquista

$(-1, j0)$. System otwarty jest przy tym inercyjny trzeciego rzędu. W sytuacji (a) mamy $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0$, w (b) — $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi$, w przypadku (c) wykres $K(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Zatem w sytuacji (a) warunek (5.9) jest spełniony. W przypadku (b) nie jest on spełniony. Gdy ma miejsce (c), wykres $K(j\omega)$ przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

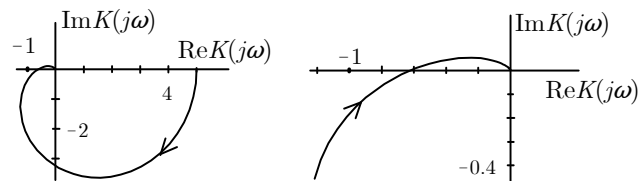
Rys. 5.13. Wzajemne usytuowanie wykresu $K(j\omega)$ i punktu $(-1, j0)$; system otwarty inercyjny trzeciego rzędu

Kryterium Nyquista określa konieczny i wystarczający warunek stabilności, który składa się z dwóch części. Niespełnienie tego warunku może zatem zajść na dwa różne sposoby, z których wynikają różne wnioski (patrz podobna dyskusja związana z kryterium Michajłowa), a mianowicie:

- Pierwszy polega na tym, że charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego (tzn. wykres $K(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$) nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$ i (5.9) nie zachodzi. Przynajmniej jeden biegun transmittancji systemu zamkniętego leży wówczas w prawej półpłaszczyźnie, co oznacza, że system ten jest niestabilny.

- W drugim charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Zatem, przynajmniej jeden biegun leży na osi $j\omega$. System zamknięty jest więc niestabilny, aczkolwiek może być na granicy stabilności.

Przykład 5.23 Niech $K(s) = 5/(s + 1)^3$. System otwarty jest oczywiście stabilny. Na rys. 5.14 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową oraz, w powiększeniu, jej fragment w pobliżu punktu $(-1, j0)$. Strzałka pokazuje kierunek wzrostu ω . Wynika z niego, że warunek Nyquista (5.9) jest spełniony. Zatem system zamknięty jest także stabilny.

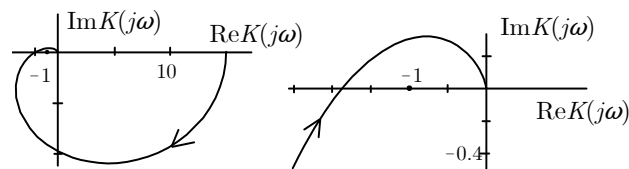


Rys. 5.14. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.23

Przykład 5.24 Niech teraz $K(s) = 15/(s + 1)^3$. Rys. 5.15 świadczy o tym, że warunek (5.9) nie jest spełniony, gdyż

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi.$$

System zamknięty nie jest więc stabilny.

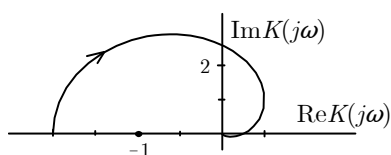


Rys. 5.15. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.24

Przykład 5.25 Niech $K(s) = -2/(s+1)^3$. Z rys. 5.16 wynika, że warunek Nyquista (5.9) nie jest spełniony, gdyż

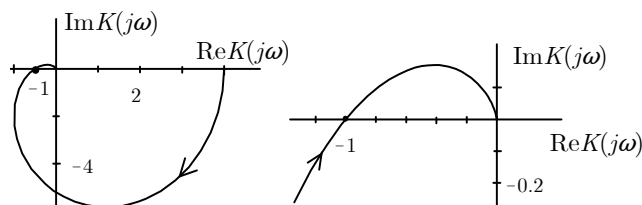
$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -2\pi.$$

System zamknięty jest więc niestabilny.



Rys. 5.16. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.25

Przykład 5.26 Niech $K(s) = 8/(s+1)^3$. System otwarty jest oczywiście stabilny. Z rys. 5.17 wynika, że warunek Nyquista (5.9) nie jest spełniony, ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego przechodzi przez punkt $(-1, j0)$. Zatem system zamknięty nie jest stabilny.



Rys. 5.17. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego (fragment w powiększeniu), przykład 5.26

Powyższe przykłady usprawiedliwiają w pewnym sensie potoczne stwierdzenie, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$. Należy jednak zaznaczyć, że nie zawsze wiadomo, co termin „obejmuje“ ma oznaczać, patrz przykład 5.28.

Ćwiczenie 5.5 Posługując się logarytmicznymi charakterystykami częstotliwościowymi, podać geometryczną metodę weryfikacji warunku stabilności podanego w twierdzeniu 5.6.

System otwarty z elementami całkującymi

Poniżej zakładamy, że system otwarty ma m_0 elementów całkujących, tzn. że wielomian $M(s)$ ma m_0 -krotny pierwiastek w punkcie $s = 0$. Jest oczywiste, że system otwarty nie jest stabilny.

Twierdzenie 5.7 (Nyquist) *Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech transmitancja $K(s)$ ma biegun o krotności m_0 w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + K(j\omega)] = m_0 \frac{\pi}{2}$$

i wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Ze względu na położenie biegunów stwierdzamy, że $m_- = m - m_0$. Na mocy lematu 5.2 zachodzi zatem równość

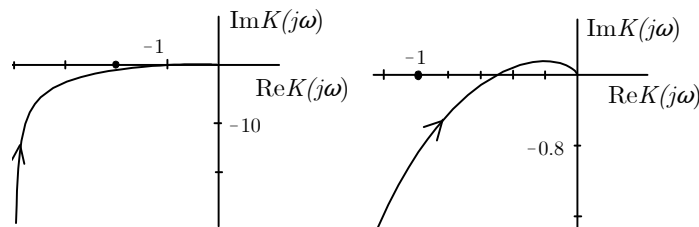
$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m - m_0) \frac{\pi}{2}.$$

Pozostała część dowodu jest jak w dowodzie twierdzenia 5.6. ■

Przykład 5.27 *W przykładzie $K(s) = 1/s(s+1)^3$. Transmitancja systemu otwartego ma jeden biegun w punkcie $s = 0$, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. Ponieważ z rys. 5.18 wynika, że*

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg [1 + K(j\omega)] = \pi/2,$$

system zamknięty więc jest stabilny.



Rys. 5.18. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.27

System otwarty niestabilny

Twierdzenie 5.8 (Nyquist) Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech transmitancja $K(s)$ systemu otwartego ma m_+ biegunów w prawej, a pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko, gdy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = m_+ \pi$$

i wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Zauważmy, że teraz wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $M(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie z wyjątkiem m_+ po prawej. Z lematu 5.2 wynika zatem, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega) = (m - 2m_+) \frac{\pi}{2}$$

oraz to, że

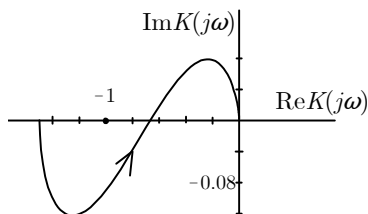
$$M(j\omega) \neq 0 \text{ dla } \omega \in [0, \infty).$$

Argumentując dalej w sposób podobny do tego w dowodzie twierdzenia 5.6, kończymy dowód. ■

Przykład 5.28 System otwarty o transmitancji $K(s) = 12/(s+4)(s+2)(s-1)$ nie jest stabilny, gdyż ma dwa bieguny w lewej i jeden w prawej półpłaszczyźnie. Na rys. 5.19 przedstawiono jego charakterystykę amplitudowo-fazową. Wynika z niego, że

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = \pi,$$

skąd wyciągamy wniosek o stabilności systemu zamkniętego.



Rys. 5.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.28

System otwarty z biegunami urojonymi

Załóżmy teraz, że $M(s)$ ma pierwiastki czysto urojone $(\eta, \bar{\eta})$, gdzie $\eta = j\rho$, $\rho > 0$. W sytuacji takiej funkcja $\arg(j\omega - \eta)$ ma punkt nieciągłości dla $\omega = \rho$ i dlatego funkcjonal przyrostu jej argumentu zdefiniowany w (5.7) nie istnieje. Definicja wymaga bowiem, aby funkcja ta była ciągła na całej półprostej $\omega \in (0, \infty)$. Jesteśmy jednak w stanie dostosować definicję przyrostu argumentu funkcji $M(j\omega)$ do obecnej sytuacji. Zauważając w tym celu, że $\arg M(j\omega)$ jest funkcją ciągłą w przedziałach $(0, \rho)$ oraz (ρ, ∞) , możemy napisać:

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \rho^-} M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} M(j\omega)$$

oraz

$$\Delta_{\rho < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} M(j\omega) - \lim_{\omega \rightarrow \rho^+} M(j\omega).$$

Jak łatwo sprawdzić,

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg (j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta}) + \Delta_{\rho < \omega < \infty} \arg (j\omega - \eta)(j\omega - \bar{\eta}) = 0.$$

Po wprowadzeniu tej zmiany, a właściwie uogólnienia, dostosujemy do obecnych potrzeb lemat 5.2.

Lemat 5.3 *Niech $a_m > 0$. Wykres $M(j\omega)$, $\omega \in [0, \infty)$, przechodzi przez punkt $s = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M(s)$ ma przynajmniej jeden pierwiastek na osi $j\omega$. Jeśli ponadto $M(s)$ ma jednokrotną parę biegunów urojonych, to*

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg M(j\omega) + \Delta_{\rho < \omega < \infty} \arg M(j\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}.$$

Dzięki powyższemu lematowi możemy podać następujące twierdzenie o stabilności systemu zamkniętego:

Twierdzenie 5.9 (Nyquist) *Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech transmitancja $K(s)$ ma jednokrotną parę biegunów na osi urojonej, a wszystkie pozostałe w lewej półpłaszczyźnie. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko, gdy*

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg [1 + K(j\omega)] + \Delta_{\rho < \omega < \infty} \arg [1 + K(j\omega)] = \pi$$

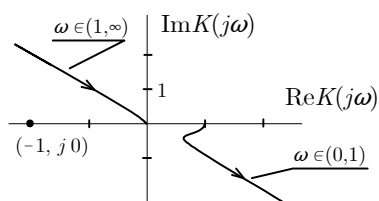
i wykres $K(j\omega)$, gdzie $\omega \in [0, \infty)$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $m_- = m - 2$ oraz $m_+ = 0$. ■

Przykład 5.29 *Transmitancja systemu otwartego $K(s) = 1/2(s^2 + 1)(2s + 1)$ ma jeden biegun w lewej półpłaszczyźnie i parę urojonych, a mianowicie $(j, -j)$. Funkcja $K(j\omega)$ jest nieciągła w punkcie $\omega = 1$ i, w związku z tym, charakterystyka amplitudowo-fazowa $K(j\omega)$, patrz rys. 5.20, składa się z dwóch gałęzi, dla jednej $\omega \in (0, 1)$, a drugiej $\omega \in (1, \infty)$. Ponieważ*

$$\Delta \arg_{0 < \omega < 1} [1 + K(j\omega)] + \Delta \arg_{1 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = -\pi,$$

więc system zamknięty nie jest stabilny.



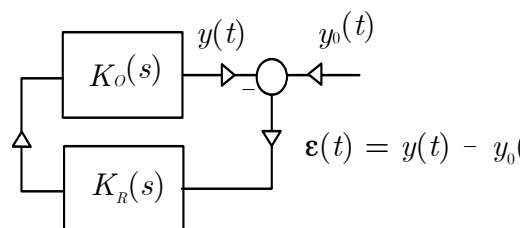
Rys. 5.20. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 5.29

Rozdział 6

Regulacja automatyczna

6.1 Wstęp

System automatycznej regulacji, przedstawiony na rys. 6.1, zawiera obiekt regulacji i regulator o transmitancjach $K_O(s)$ i $K_R(s)$. Sygnał wyjściowy $y(t)$ obiektu powinien być równy przychodzącemu z zewnątrz sygnałowi $y_0(t)$ wartości zadanej. Spełnienie tego zadania ma umożliwić regulator, który reaguje na sygnał $\varepsilon(t) = y_0(t) - y(t)$, czyli tzw. uchyb regulacji. O ile transmitancja obiektu $K_O(s)$ jest zadana, o tyle $K_R(s)$ podlega wyborowi.



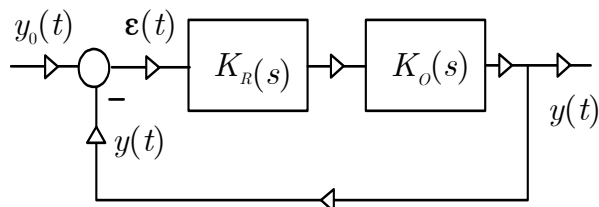
Rys. 6.1. System automatycznej regulacji

System z rys. 6.1 można przedstawić także jak na rys. 6.2. Ma on ujemne sprzężenie zwrotne, patrz także rys. 5.9, s. 88, a

$$K(s) = K_O(s)K_R(s)$$

jest transmitancją systemu otwartego, rys 6.3. Z rysunku wynika, że

$$E(s) = Y_0(s) - Y(s)$$



Rys. 6.2. Alternatywny schemat systemu automatycznej regulacji

oraz

$$Y(s) = K(s)E(s).$$

Transmitancja $K_Z(s)$ systemu zamkniętego, tzn. systemu o wejściu y_0 i wyjściu y , jest zatem równa

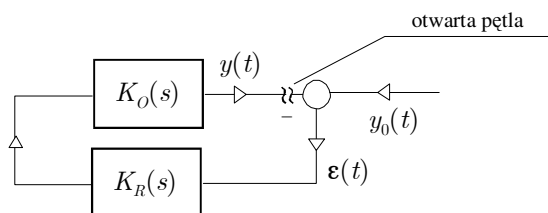
$$K_Z(s) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)} = \frac{K_O(s)K_R(s)}{1 + K_O(s)K_R(s)}.$$

Oznaczając jak zwykle

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

otrzymujemy więc

$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)}. \quad (6.1)$$



Rys. 6.3. Otwarty układ automatycznej regulacji

Przez $K_E(s)$ oznaczmy teraz tzw. transmitancję uchybową, tzn. transmitancję systemu o wejściu y_0 i wyjściu ε . Postępując jak powyżej, nietrudno

sprawdzić, że wyraża się ona następującym wzorem:

$$K_E(s) = \frac{E(s)}{Y_0(s)} = \frac{1}{1 + K(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)},$$

skąd wynika, że

$$K_E(s) = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}. \quad (6.2)$$

Możemy zatem stwierdzić na końcu, że

$$M_Z(s) = L(s) + M(s)$$

jest wielomianem charakterystycznym zarówno transmitancji systemu zamkniętego, jak i uchybowej. Mówimy także, że jest to wielomian charakterystyczny systemu automatycznej regulacji.

Ćwiczenie 6.1 *Niech transmitancja układu otwartego będzie taka, że $l < m$. Niech sygnał wartości zadanej $y_0(t)$ będzie ograniczony (ciągły lub nie), a warunek początkowy układu otwartego dowolny. Wykazać, że (patrz także ćwiczenie 2.3, s. 33)*

- (a) *wyjście obiektu $y(t)$ jest funkcją ciągłą,*
 (b) *punkty nieciągłości uchybu $\varepsilon(t)$ oraz sygnału wartości zadanej $y_0(t)$ są identyczne.*

6.2 Wymagania

Zadanie postawione przed systemem zostanie spełnione w pełni wtedy, gdy regulator zostanie dobrany w ten sposób, że $\varepsilon(t) \equiv 0$ dla każdego $y_0(t)$. Inaczej mówiąc, wtedy, gdy $K_E(s) = 0$, czyli gdy

$$\frac{1}{1 + K_O(s)K_R(s)} = 0,$$

co jednak nie jest możliwe. Wynika stąd prosty wniosek, że żądania te są zbyt wygórowane i należy je osłabić.

Nowe, możliwe do spełnienia wymagania postawimy w sytuacji, gdy $y_0(t) = 1(t)$. Zażądamy, aby reakcja $y(t)$ systemu, a tym samym uchyb $\varepsilon(t)$, miały wówczas odpowiednie własności zarówno dla dużych, jak i małych t .

Stabilność

Pierwsze żądanie polega na tym aby, przy pobudzeniu $y_0(t) = 1(t)$, granica uchybu $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istniała. Z własności 4.5, s. 63, wynika, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy system zamknięty jest stabilny, co podamy jako poniższą własność.

Własność 6.1 *Niech $y_0(t) = 1(t)$. Granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system regulacji jest stabilny.*

W kontekście żądania stabilności należy stwierdzić, że system automatycznej regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego $M_Z(s)$ spełnia którekolwiek z poniższych kryteriów:

- ▷ Hurwitza, patrz twierdzenie 5.3, s. 78,
- ▷ Michajłowa, patrz twierdzenie 5.5, s. 85,
- ▷ Nyquista, patrz twierdzenia 5.6–5.9, s. 90 i dalsze.

Uchyb w stanie ustalonym

Dla $y_0(t) = 1(t)$ stabilność zapewnia istnienie granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$, czyli ustalonej wartości uchybu. Jest przy tym oczywiste, że zainteresowani jesteśmy małą jej wartością. W szczególności pożądaną jest, aby była ona równa zero.

Szybkość regulacji

Trzeci aspekt świadczący o jakości systemu związany jest z szybkością regulacji. Przy pobudzeniu $y_0(t) = 1(t)$ i założeniu, że warunki początkowe w obiekcie oraz regulatorze są zerowe, szybkość reakcji w początkowym jej przebiegu będziemy oceniać biorąc pod uwagę jej pochodne w punkcie $t = 0$, czyli $y^{(1)}(0)$, $y^{(2)}(0)$ itd. Dla przykładu, regulację, w której $y(0) = 0$ i $y'(0) > 0$ będziemy uważać za szybszą od tej, która zapewnia, że $y(0) = y'(0) = 0$ i $y''(0) > 0$. Innymi słowy, im mniej kolejnych pochodnych odpowiedzi $y(t)$ systemu zamkniętego zeruje się w punkcie $t = 0$, tym lepiej. Szybszy bowiem jest wtedy przebieg regulacji dla małych t , tzn. w początkowej fazie.

Podsumowanie

Podsumowując można stwierdzić, że od regulatora żądamy, aby zapewnił on:

- ▶ stabilność,

- ▶ małą wartość uchybu w stanie ustalonym,
- ▶ dużą szybkość regulacji dla małych t .

Uwzględnienie wszystkich powyższych wymagań prowadzi do regulatora zapewniającego poprawny przebieg uchybu zarówno w jego początkowej, jak również końcowej fazie.

6.3 Regulacja statyczna, czyli P

6.3.1 Własności

Układ regulacji, w którym transmitancja $K(s)$ systemu otwartego nie ma bieguna w punkcie $s = 0$ nazywamy statycznym. Jeśli ponadto układ otwarty jest stabilny, to jego wzmocnienie w stanie ustalonym jest skończone i równe $K(0)$, patrz własność 4.5, s. 63. Ma on zatem charakterystykę statyczną, co uzasadnia nazwę całego układu regulacji.

Zbadamy teraz asymptotyczne własności uchybu w sytuacji, gdy, jak już to przyjęliśmy, $y_0(t) = 1(t)$.

Własność 6.2 *Jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to w statycznym, stabilnym układzie regulacji*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + K(0)} \neq 0.$$

Dowód. Stabilność systemu regulacji jest równoznaczna ze stabilnością systemu o transmitancji $K_E(s)$, patrz własność 6.1. Ze stabilności i własności 4.5, s. 63, wynika więc istnienie granicy $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ oraz to, że jest ona równa

$$\lim_{s \rightarrow 0} K_E(s) = \frac{1}{1 + K(0)},$$

co kończy dowód. ■

Najprostszym regulatorem, który pozwala zapewnić stabilność, jest regulator proporcjonalny. Ma on transmitancję

$$K_R(s) = k_1$$

i nazywa się regulatorem P. Aby poddać analizie statyczny system regulacji P zakładamy, że transmitancja $K_O(s)$ obiektu nie ma bieguna w punkcie $s = 0$, czyli że system otwarty nie ma własności całkujących. Z własności 6.2 wynika teraz kolejna.

Własność 6.3 Niech $y_0(t) = 1(t)$. W stabilnym układzie automatycznej regulacji typu P uchyb w stanie ustalonym wyraża się wzorem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{1 + k_1 K_O(0)} \neq 0.$$

Zbadamy teraz własności reakcji $y(t)$ w punkcie $t = 0$, czyli szybkość reakcji na pobudzenie skokowe. Założymy przy tym, że transmitancją obiektu jest

$$K_O(s) = \frac{L_O(s)}{M_O(s)}, \quad (6.3)$$

gdzie

$$L_O(s) = s^l + \beta_{l-1}s^{l-1} + \dots + \beta_0$$

oraz

$$M_O(s) = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \dots + \alpha_0.$$

Oznaczmy jeszcze, jak zwykle, $p = m - l$. Ponieważ

$$K_Z(s) = \frac{L_O(s)}{k_1 L_O(s) + M_O(s)},$$

korzystając z własności 2.10, s. 27, wnioskujemy zatem, że

$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-1)}(0) = 0 \text{ i dopiero } y^{(p)}(0) = k_1.$$

Jest oczywiste, że im większe p , tym wolniejsza jest reakcja na pobudzenie. Ponieważ wskazane jest, aby pochodna $y^{(p)}(0)$ była dodatnia, należy zatem stosować dodatnie k_1 .

Przykład 6.1 Transmitancje obiektu i regulatora są równe

$$K_O(s) = \frac{10s + 1}{(3s - 1)^2(s + 1)} = \frac{10s + 1}{9s^3 + 3s^2 - 5s + 1}$$

i $K_R(s) = k$. Układ otwarty jest niestabilny, a jego transmitancją jest

$$K(s) = \frac{(10s + 1)k}{9s^3 + 3s^2 - 5s + 1}.$$

Równanie charakterystyczne systemu zamkniętego ma następującą postać: $9s^3 + 3s^2 + (10k - 5)s + (k + 1) = 0$. Ponieważ macierz Hurwitza jest

$$\begin{bmatrix} 3 & k + 1 & 0 \\ 9 & 10k - 5 & 0 \\ 0 & 3 & k + 1 \end{bmatrix},$$

zatem $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 21k - 24$ oraz $\Delta_3 = \Delta_2(k + 1)$. Zastosowanie kryterium Hurwitza prowadzi do wniosku, że system regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $8/7 < k$. Dla tak wybranego k , jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1 + k)$, $y(0) = y'(0) = 0$ oraz $y''(0) = 10k/9$.

Przykład 6.2 Transmitancje obiektu i regulatora dane są następującymi wzorami: $K_O(s) = (s + 3)/(s + 2)^2(s + 1)$ oraz $K_R(s) = k$. Wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego zatem to $s^3 + 5s^2 + (k + 8)s + 3k + 4$. Stosując kryterium Hurwitza, dochodzimy do wniosku, że układ regulacji jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $-4/3 < k$. Dla takiego k , jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1 + 3k)$, $y(0) = y'(0) = 0$ oraz $y''(0) = k$.

Przykład 6.3 Transmitancją obiektu jest $K_O(s) = (s - 5)/(s + 2)^2(s - 1)$, natomiast regulatora $K_R(s) = k$. Prowadzi to do następującego wielomianu charakterystycznego: $M_Z(s) = s^3 + 3s^2 + ks + (-5k - 4)$. Stosując kryterium Hurwitza stwierdzamy, że układ regulacji jest niestabilny.

Ćwiczenie 6.2 Wykazać, że w stabilnym statycznym układzie regulacji jest tak, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)$ istnieje, to granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ także istnieje. Wyznaczyć ją zakładając, że $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 1$.

6.3.2 Regulacja z obiektem inercyjnym

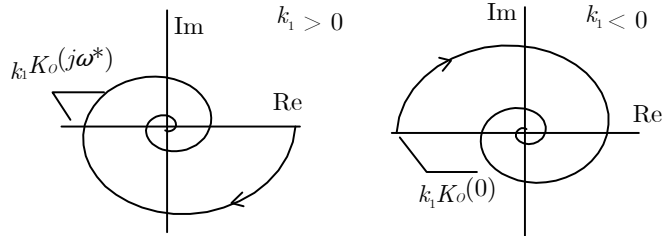
Teraz zbadamy własności układu regulacji typu P w sytuacji, gdy obiekt jest inercyjny, tzn. gdy jego transmitancja jest jak poniżej

$$K_O(s) = \frac{1}{(s - s_1) \cdots (s - s_p)} \quad (6.4)$$

i wszystkie jej bieguny są ponadto rzeczywiste, ujemne. Zwracamy uwagę na to, że $K(0) > 0$.

Ponieważ, dla każdego i , $|1/(j\omega - s_i)|$ jest dla $\omega \in [0, \infty)$ malejącą funkcją pulsacji ω , a więc tę samą własność ma także $|K_O(j\omega)|$. Zatem, dla $k_1 > 0$, charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego, tzn. wykres $k_1 K_O(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$, ma kształt zwijającej się spirali przechodzącej kolejno przez m ćwiartek płaszczyzny, jak to pokazuje rys. 6.4.

Jest więc oczywiste, że spośród punktów charakterystyki przecinających oś liczb rzeczywistych najistotniejszy jest ten, który jest najbardziej wysunięty na lewo. Odpowiada on najmniejszej, dodatniej pulsacji ω rozwiązującej równanie $\text{Im } K_O(j\omega) = 0$. Oznaczając ją przez ω^* i odwołując się do kryterium Nyquista



Rys. 6.4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego

dochodzimy do wniosku, że, dla $k_1 \geq 0$, warunkiem stabilności jest spełnienie nierówności

$$-1 < k_1 \operatorname{Re} K_O(j\omega^*).$$

Z tego samego rysunku wynika, że dla $k_1 < 0$ warunkiem stabilności jest nierówność

$$-1 < k_1 K_O(0).$$

Ostatecznie stwierdzamy, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wzmacnienie regulatora spełnia nierówności

$$k_{\min} < k_1 < k_{\max},$$

gdzie

$$k_{\min} = -\frac{1}{K_O(0)} \quad \text{oraz} \quad k_{\max} = \frac{1}{|\operatorname{Re} K_O(j\omega^*)|}.$$

Zauważmy, że k_{\min} jest ujemne, natomiast k_{\max} dodatnie.

Dla k_1 zapewniającego stabilność, z uwagi na własność 6.3, otrzymujemy więc

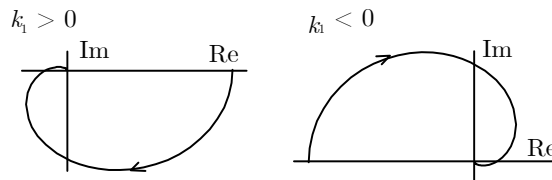
$$0 < \frac{1}{1 + k_{\max} K_O(0)} < \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t),$$

co oznacza istnienie dolnego ograniczenia dla uchybu w stanie ustalonym. Ponieważ jednak chcemy, aby był on możliwie mały, własność ta sugeruje więc, że współczynnik wzmacnienia regulatora k_1 powinien być duży, bliski k_{\max} . Warto tutaj jeszcze zwrócić uwagę na to, że ujemne k_1 jest gorsze od $k_1 = 0$, tzn. od sytuacji, w której nie stosuje się w istocie sprzężenia zwrotnego, czyli automatycznej regulacji. Dla nieujemnych k_1 zapewniających stabilność zatem

$$0 < \frac{1}{1 + k_{\max} K_O(0)} < \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \leq 1.$$

Przykład 6.4 Niech teraz transmitancje obiektu i regulatora będą jak następuje: $K_O(s) = 2/(s+1)^2(s+2)$ oraz $K_R(s) = k$. Transmitancją układu otwartego jest zatem $K(s) = 2k/(s+1)^2(s+2)$. Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest więc $M_Z(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + (2+2k)$. Zastosowanie kryterium Hurwitza prowadzi do wniosku, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 < k < 9$. Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Ponieważ $K_O(0) = 1$, dla takiego k zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1+k)$. Uchyb w stanie ustalonym nie jest zatem mniejszy niż $1/(1+9) = 1/10$. Ponadto $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(t) = 2k$.

Przykład 6.5 Dla $K_O(s) = 1/(2s+1)^3$ charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego o transmitancji $k_1/(2s+1)^3$ pokazana jest na rys. 6.5. Rozwiązując równanie $\text{Im } K_O(j\omega) = 0$ otrzymujemy $\omega^* = \sqrt{3}/2$ oraz znajdujemy następnie $\text{Re } K_O(j\omega^*) = -1/8$. Wynika stąd, że $k_{\max} = 8$. Ponieważ $K_O(0) = 1$, zatem $k_{\min} = -1$. Z kryterium Nyquista wynika, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wzmacnienie regulatora spełnia nierówności $-1 < k_1 < 8$. Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Jest oczywiste, że dla k_1 zapewniającego stabilność: $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 1/(1+k_1) > 1/9$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(t) = k_1/8$.



Rys. 6.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 6.5

6.4 Regulacja astatyczna

6.4.1 Własności

Załóżmy teraz, że transmitancja $K(s)$ układu otwartego ma pojedynczy biegun w punkcie $s = 0$. Układ otwarty, nie będąc stabilnym, nie ma zatem charakterystyki statycznej. Z tego też powodu taki system automatycznej regulacji nazywamy astatycznym. Jego zasadniczą własność, która odróżnia go od układu z regulatorem P, podana jest poniżej.

Własność 6.4 *Jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to w stabilnym, astatycznym układzie regulacji*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Dowód. Ponieważ na mocy założenia system zamknięty jest stabilny, więc granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje. Korzystając teraz z własności 4.5, otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} K_E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K(s)},$$

i zauważając następnie, że $\lim_{s \rightarrow 0} K(s) = \infty$, kończymy dowód. ■

Przykład 6.6 *Transmitancjami obiektu i regulatora są odpowiednio $K_O(s) = 1/(s+1)(s+2)$ i $K_R(s) = k/s$. Wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego jest więc $s^3 + 3s^2 + 2s + 2k$. Ponieważ macierzą Hurwitza jest*

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2k \end{bmatrix},$$

więc $\Delta_2 = 6 - 2k$. Kryterium Hurwitza prowadzi zatem do wniosku, że system jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $3 < k$. Jeśli $y_0(t) = 1(t)$, to dla takiego wzmocnienia k zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Ćwiczenie 6.3 *Wykazać, że stabilny, astatyczny układ regulacji ma tę własność, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.*

6.4.2 Regulacja I

O układzie z regulatorem o transmitancji $K_R(s) = k_2/s$ mówimy, że jest on typu I. W dalszej analizie zakładamy, że $y_0(t) = 1(t)$. Jeśli system jest stabilny, to – dzięki własności 6.4 – stwierdzamy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Niech teraz obiekt będzie jak w (6.3). Dla $k_2 \neq 0$ spełniającego warunek stabilności przeprowadzimy analizę szybkości regulacji. Mając na uwadze to, że $y(t)$ jest wyjściem systemu zamkniętego o transmitancji

$$K_Z(s) = \frac{k_2 L_O(s)}{k_2 L_O(s) + s M_O(s)}$$

i, korzystając jak poprzednio z własności 2.10, s. 27, wnioskujemy, że

$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p)}(0) = 0 \text{ i dopiero } y^{(p+1)}(0) = k_2,$$

ponieważ

$$y^{(p+1)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k_2 s^{p+1} L_O(s)}{k_2 L_O(s) + s M_O(s)} = k_2.$$

Z powyższego ustalenia wynika ważny wniosek, a mianowicie że regulacja I jest wolniejsza od regulacji P. Teraz bowiem, dopiero $y^{(p+1)}(0) = k_2 \neq 0$, co oznacza, że dopiero $p+1$ pochodna jest niezerowa, podczas gdy dla regulatora P już $y^{(p)}(0) = k_1 \neq 0$.

Reasumując możemy stwierdzić, że regulacja I ma lepsze własności asymptotyczne, gdyż zapewnia zerowy uchyb ustalony. Regulacja P jest natomiast szybsza.

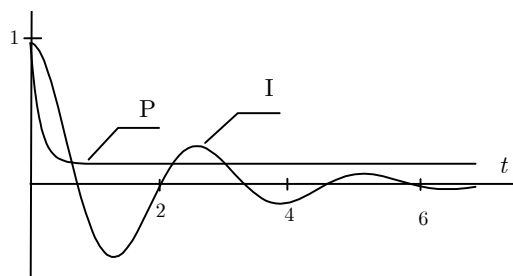
Przykład 6.7 Niech teraz $K_O(s) = 1/(s+1)(2s+1)$ oraz $K_R(s) = k/s$. Transmittancja układu otwartego jest więc równa $k/s(s+1)(2s+1)$, skąd wynika, że wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego ma postać $M_Z(s) = s(s+1)(2s+1) + k = 2s^3 + 3s^2 + s + k$. Macierz Hurwitza jest zatem następująca:

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{bmatrix}.$$

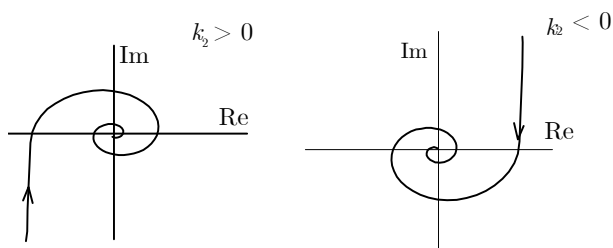
Kryterium Hurwitza prowadzi zatem do wniosku, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < k < 3/2$. Dla k mieszczącego się w tym przedziale oraz sygnału wartości zadanej $y_0(t) = 1(t)$ stwierdzamy ponadto, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ oraz $y^{(3)}(0) = k/2$.

Przykład 6.8 Niech $y_0(t) = 1(t)$ i niech obiekt będzie inercyjny o transmittancji $K_O(s) = 6/(s+1)$. Na rys. 6.6 przedstawiono uchyb przy zastosowaniu regulatorów P oraz I o transmittancjach, odpowiednio, $K_R(s) = 1$ i $K_R(s) = 1/s$. Wyraźnie widać szybszy przebieg w początkowej fazie przy pierwszym i lepsze własności asymptotyczne przy drugim. Regulator P zapewnia więc lepsze własności dla małych t , a regulator I dla dużych.

Przykład 6.9 Niech teraz obiekt będzie jak w (6.4), czyli inercyjny o transmittancji mającej wszystkie bieguny rzeczywiste, ujemne. Regulator typu I ma transmittancję $K_R(s) = k_2/s$. Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego pokazana jest na rys. 6.7. Z kryterium Nyquista 5.7, s. 95, wynika więc, że system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $k_{\min} < k_2 < k_{\max}$, gdzie $k_{\min} < 0$ i $k_{\max} > 0$. Dla k_2 zawartego w tym przedziale zatem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, jeśli tylko $y_0(t) = 1(t)$. Warto porównać ten rezultat z uzyskanym w § 6.3.2 podczas omawiania regulacji P.



Rys. 6.6. Uchyb w regulacji P oraz I, przykład 6.8



Rys. 6.7. Charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego, przykład 6.9

Ćwiczenie 6.4 Dla systemu jak w ostatnim przykładzie wyznaczyć k_{\min} oraz k_{\max} , jeśli $K_O(s) = 1/(s+1)^3$.

6.4.3 Regulacja PI

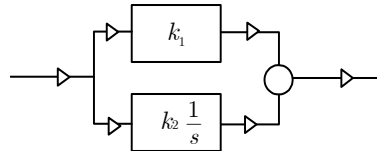
Regulator PI ma transmitancję

$$K_R(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s}.$$

Można uważać, że powstał on przez równoległe połączenie części proporcjonalnej i całkującej, patrz rys. 6.8. Ponieważ ma ona biegun w punkcie $s = 0$, dla k_1 oraz k_2 gwarantujących stabilność, wnioskujemy zatem, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$, jeśli tylko $y_0(t) = 1(t)$.

Jeśli ponadto transmitancja obiektu jest jak w (6.3), to

$$K_Z(s) = \frac{(k_1 s + k_2)L_O(s)}{(k_1 s + k_2)L_O(s) + sM_O(s)}.$$



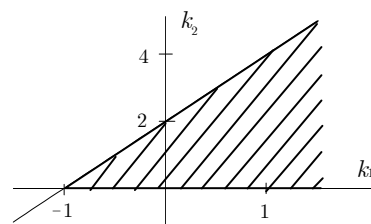
Rys. 6.8. Regulator PI

Ponieważ różnica pomiędzy stopniami wielomianów w mianowniku i liczniku wynosi p , więc

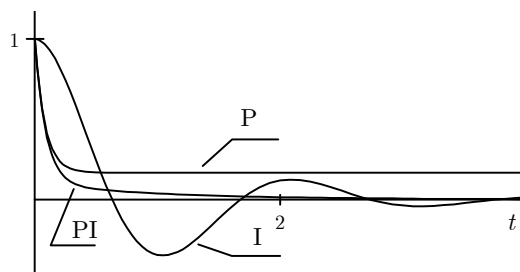
$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-1)}(0) = 0 \text{ i dopiero } y^{(p)}(0) = k_1.$$

Regulacja PI zapewnia zatem zerowy uchyb ustalony, jak ma to miejsce przy regulacji I, i jest tak szybka, według naszej miary, jak regulacja P. Przykład 6.11 pokazuje to wyraźnie.

Przykład 6.10 *Obiekt oraz regulator typu PI mają transmitancje $K_O(s) = 1/(s+1)^2$ oraz $K_R(s) = k_1 + k_2/s$. Transmitancja systemu otwartego jest więc równa $(k_1s + k_2)/(s^3 + 2s^2 + s)$. Wielomian charakterystyczny systemu zamkniętego ma zatem następującą postać: $s^3 + 2s^2 + (1 + k_1)s + k_2$. System ten jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $k_2 < 2k_1 + 2$, $k_1 > -1$ oraz $k_2 > 0$. Zbiór wszystkich par (k_1, k_2) , dla których nierówności te zachodzą pokazany jest na rys. 6.9.*

Rys. 6.9. Zbiór par (k_1, k_2) , dla których system jest stabilny, przykład 6.10

Przykład 6.11 *Niech teraz $K_O(s) = 10/(s+2)$ oraz $y_0(t) = 1(t)$. Dla regulatorów P, I oraz PI o transmitancjach 1, $1/s$, oraz $1+1/s$, uchyb przedstawiono na rys. 6.10. Wyższość regulacji PI jest oczywista.*

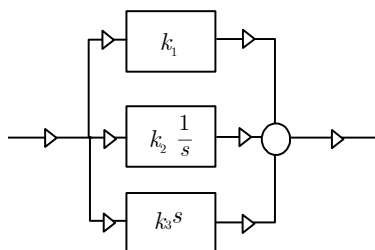


Rys. 6.10. Uchyb w regulacji P, I oraz PI, przykład 6.11

6.4.4 Regulacja PID

Regulator PID, patrz rys. 6.11, ma transmitancję

$$K_R(s) = k_1 + k_2 \frac{1}{s} + k_3 s.$$



Rys. 6.11. Regulator PID

Niech teraz $y_0(t) = 1(t)$. Ponieważ $K_R(s) = (k_3 s^2 + k_1 s + k_2)/s$, zatem dla k_1, k_2, k_3 zapewniających stabilność zachodzi zbieżność $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$. Dla obiektu jak w (6.3),

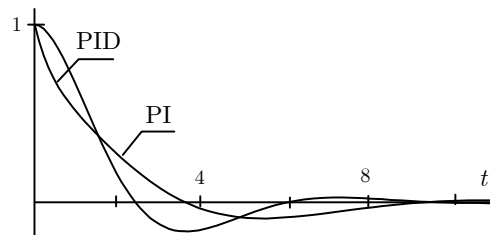
$$K_Z(s) = \frac{(k_3 s^2 + k_1 s + k_2) L_O(s)}{(k_3 s^2 + k_1 s + k_2) L_O(s) + s M_O(s)}.$$

Argumentując jak to robiliśmy wcześniej, bez trudu dochodzimy zatem do wniosku, że

$$y^{(1)}(0) = \dots = y^{(p-2)}(0) = 0 \text{ oraz } y^{(p-1)}(0) = k_3.$$

Regulacja PID zapewnia zatem zerowy uchyb w stanie ustalonym. Jest ponadto najlepsza ze wszystkich omówionych.

Przykład 6.12 *Transmitancja obiektu jest równa $K_O(s) = 1/(s+1)^2$, a regulatorów, kolejno, $K_R(s) = 1 + 1/s$ oraz $K_R(s) = 1 + 1/s + s$. Dla $y_0(t) = 1(t)$, uchyb $\varepsilon(t)$ pokazano na rys. 6.12. W początkowym przebiegu, tzn. dla małych t regulacja PID jest lepsza, gdyż uchyb jest dla niej mniejszy. Jest to związane z tym, że $\varepsilon'(0) = -1 < 0$, podczas gdy dla regulacji PI mamy $\varepsilon'(0) = 0$. Dla większych t , np. dla $t > 2$, trudno jednak mówić o lepszej jakości którejkolwiek z nich.*



Rys. 6.12. Regulacja PI i PID, przykład 6.12

Możemy teraz dokonać podsumowania naszych rozważań dotyczących poszczególnych rodzajów regulacji. Wyniki analizy przeprowadzonej dla obiektu (6.3) i różnych typów regulacji zestawiono w tabelach 6.1 oraz 6.2. Pierwsza dotyczy uchybu w stanie ustalonym, druga natomiast wyjścia obiektu w chwili $t = 0$. Możemy dzięki temu porównać typy regulacji P, I, PI oraz PID zarówno dla małych, jak i dużych t , czyli pod kątem szybkości działania w początkowym przebiegu oraz własności asymptotycznych.

Przypominamy przy tym, że $y_0(t) = 1(t)$, transmitancją obiektu jest $K_O(s) = L_O(s)/M_O(s)$ oraz $p = \text{st}[M_O(s)] - \text{st}[L_O(s)]$, gdzie $\text{st}[Q(s)]$ oznacza stopień wielomianu $Q(s)$.

Zalety regulacji PID, rozpatrywane pod kątem badanych własności, są widoczne. Dla t istotnie większego od zera wyższość regulacji PID nad PI może jednak zaniknąć, o czym świadczy przykład 6.12. Wyjaśnieniem tego efektu jest to, że dla dużych t , gdy uchyb zmienia się wolno, wpływ części D, patrz rys. 6.11, jest już mały.

Tabela 6.1. Własności uchybu

Regulacja	$\varepsilon(0)$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$
P	1	$\frac{1}{1 + k_1 K_O(0)} \neq 0$
I	1	0
PI	1	0
PID	1	0

Tabela 6.2. Własności wyjścia obiektu

Regulacja	$y(0)$	$y^{(1)}(0)$	\dots	$y^{(p-2)}(0)$	$y^{(p-1)}(0)$	$y^{(p)}(0)$	$y^{(p+1)}(0)$
P	0	0	\dots	0	0	k_1	
I	0	0	\dots	0	0	0	k_2
PI	0	0	\dots	0	0	k_1	
PID	0	0	\dots	0	k_3		

6.5 Inne sygnały wartości zadanej

Do tej pory badaliśmy zachowanie się systemu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy sygnał wartości zadanej jest skokiem jednostkowym, czyli gdy $y_0(t) = 1(t)$. Zadanie stawiane systemowi polegało więc na stabilizacji wyjścia obiektu na poziomie wyznaczonym tym właśnie sygnałem. Niekiedy jest jednak tak, że sygnał ten ma kształt bardziej skomplikowany.

Założymy teraz, że ma on postać $y_0(t) = \alpha + \beta t$. W całej poniższej analizie przyjmujemy, że obiekt jest inercyjny i ma transmitancję $K_O(s) = 1/M_O(s)$, a zamknięty system regulacji jest stabilny.

Zacznijmy od sytuacji prostszej i założymy, że $y_0(t) = t$. Ponieważ $Y_0(s) = 1/s^2$, zatem

$$E(s) = \frac{1}{s^2 (1 + K_R(s)K_O(s))}.$$

Jeśli więc zastosujemy regulator P, czyli regulator o transmitancji $K_R(s) = k_1$,

to

$$E(s) = \frac{M_O(s)}{s^2 (M_O(s) + k_1)}.$$

Ponieważ, poza szczególnymi przypadkami, stopnie wielomianów $M_O(s)$ oraz $k_1 + M_O(s)$ są identyczne, więc $\varepsilon(t) = c_1 t + c_0 + r(t)$, gdzie c_0 i c_1 są pewnymi liczbami oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$. Przy regulatorze P jest zatem tak, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$, co oznacza, że nie gwarantuje on ograniczonego uchybu. Nie spełnia on zatem stawianych przed nim wymagań.

Dla regulatora I, czyli regulatora o transmitancji $K_R(s) = 1/s$, natomiast

$$E(s) = \frac{M_O(s)}{sM_O(s) + 1},$$

skąd wynika, że $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = M_O(0) < \infty$. W stanie ustalonym uchyb jest więc skończony.

Niech teraz $y_0(t) = \alpha + \beta t$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. W świetle powyższych rozważań jest oczywiste, że przy ustalonym wcześniej obiekcie inercyjnym,

- ▷ dla regulatora P, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \infty$,
- ▷ dla regulatora I (jak również PI oraz PID), $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ istnieje oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon'(t) = 0$.

Regulator I zapewnia zatem, że w stanie ustalonym:

- ▷ uchyb jest skończony,
- ▷ uchyb prędkościowy jest równy zero.

Widzimy więc, że jeśli sygnał wartości zadanej jest wielomianem zerowego rzędu (tzn. jeśli $y_0(t) = \alpha$), to można – z opisanymi już wcześniej skutkami – stosować zarówno regulator P, jak i I. Jeśli sygnał ten jest wielomianem pierwszego stopnia (tzn. jeśli $y_0(t) = \alpha + \beta t$), to regulator P nie jest przydatny. Można stosować jedynie regulator I.

Należy zwrócić uwagę na to, że przy wielomianowym sygnale wartości zadanej nie można mówić jednak o układzie stabilizacji, bowiem zadanie jakie stoi przed systemem polega na tym, aby wyjście obiektu nadążało za zmieniającą się wartością zadaną. Mówimy wówczas o systemie nadążnym lub śledzącym. Zwykle jednak w systemach takich sygnał wartości zadanej ani nie jest z góry znany, ani nie jest wielomianem. Z tego też względu wydaje się, że pełniejsza jest analiza, w której przyjmuje się, że $y_0(t)$ zmienia się przypadkowo, czyli jest procesem stochastycznym. Do analizy takiej można stosować wówczas probabilistyczne metody korelacyjne, patrz § 7.4.

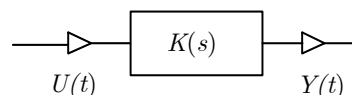
Ćwiczenie 6.5 *Niech system regulacji I będzie stabilny. Wykazać, że jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t)/t$ istnieje, to $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ także istnieje.*

Rozdział 7

Sygnaly losowe w systemach ciągłych

7.1 Wprowadzenie

Zakładamy teraz, że system o transmitancji $K(s)$, rys. 7.1, pobudzany jest stacjonarnym procesem stochastycznym $U(t)$ drugiego rzędu o funkcji korelacji $R_U(\tau)$, patrz dodatek C. Zakładamy przy tym, że system ten jest stabilny oraz jego transmitancją jest $K(s) = L(s)/M(s)$, przy czym $l < m$. Odpowiedź impulsowa $k(t)$ jest zatem funkcją ciągłą na półprostej $[0, \infty)$ taką, że $\int_0^\infty |k(t)|dt < \infty$ oraz $\int_0^\infty k^2(t)dt < \infty$, patrz własność 4.2, s. 62. Pamiętajmy przy tym, że $k(t) = 0$ dla $t < 0$.



Rys. 7.1. System o losowym sygnale wejściowym

Zaczniemy od tego, że czas przebiega teraz całą prostą, co oznacza, że $t \in (-\infty, \infty)$. Ponieważ system jest stabilny, więc wyjście systemu w chwili t jest określone przez całkę

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \tau)U(\tau)d\tau = \int_0^\infty k(\tau)U(t - \tau)d\tau. \quad (7.1)$$

Z uwagi na to, że sygnał $U(t)$ jest realizacją procesu stochastycznego, jego własności nie są bliżej znane. Nie mamy w związku z tym pewności, czy kon-

kretna realizacja $U(t)$ jest funkcją na tyle gładką, że całka powyższa istnieje. Nie można jej zatem interpretować jako zwykłej całki Riemanna. Będziemy ją natomiast rozumieć w sensie średniokwadratowym, patrz § C.1.3, s. 252. Na temat ten wypowiada się poniższy rezultat, który wynika z twierdzenia C.1 o istnieniu całki średniokwadratowej, patrz s. 252.

Twierdzenie 7.1 *Całka średniokwadratowa (7.1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_0^\infty k(t-\tau)R_U(t)d\tau$.*

Najpierw założymy, że proces $U(t)$ jest białym szumem, a w kolejnym paragrafie, że jest on skorelowany.

7.2 System pobudzany białym szumem

Zakładamy, że system pobudzany jest stacjonarnym białym szumem $U(t)$ drugiego rzędu. Zgodnie z uwagą C.1, s. 252, całkę (7.1) będziemy traktować jako formalnie istniejącą. Zatem, dla ustalonego t , $Y(t)$ jest zmienną losową, a rodzina zmiennych losowych $Y(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, procesem stochastycznym. Teraz wykażemy, że jest to proces stacjonarny drugiego rzędu. Przypominamy przy tym, że \mathbb{E} oznacza wartość oczekiwaną.

Twierdzenie 7.2 *Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym białym szumem, to proces $Y(t)$ jest także stacjonarny drugiego rzędu.*

Dowód. Zauważmy, że $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau) + m_U^2$, gdzie $m_U = \mathbb{E}U(t)$. Z (7.1) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y^2(t) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi)k(t-\eta)\mathbb{E}\{U(\xi)U(\eta)\}d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi)k(t-\eta)R(\xi-\eta)d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\tau)d\tau + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\tau)d\tau \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

co oznacza, że $Y(t)$ jest procesem drugiego rzędu. Jest oczywiste, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Y(t+\tau)Y(t)\} &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty k(t+\tau-\xi)k(t-\eta)R(\xi-\eta)d\xi d\eta \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^\infty k(\eta-\tau)k(\eta)d\eta + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\tau)d\tau \right)^2, \end{aligned}$$

która to wielkość nie zależy od t . Proces jest zatem stacjonarny, co kończy dowód. ■

Własności procesu stochastycznego $Y(t)$, czyli sygnału na wyjściu systemu są zebrane poniżej.

Własność 7.1 Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym białym szumem o funkcji korelacji $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau)$ (czyli taki, że $\mathbb{E}U(t) = 0$), to

- (a) $Y(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu,
- (b) $\mathbb{E}Y(t) = 0, \mathbb{E}Y^2(t) = \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi) d\xi$,
- (c) $R_Y(\tau) = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^\infty k(\xi)k(\xi - \tau) d\xi$,
- (d) $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną i $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0$,
- (e) $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$,
- (f) $R_{YU}(\tau) = \sigma_U^2 k(\tau)$.

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że własności (a), (b) oraz (c) zostały już wykazane w dowodzie ostatniego twierdzenia. Aby wykazać prawdziwość (d), zauważmy, że

$$\begin{aligned} |R_Y(\tau)| &= \sigma_U^2 \left| \int_{\tau}^{\infty} k(\xi - \tau)k(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \sigma_U^2 \max_t |k(t)| \int_{\tau}^{\infty} |k(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Ze stabilności systemu wynikają dwa istotne teraz fakty, a mianowicie to, że $\max_t |k(t)| < \infty$ oraz $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\tau}^{\infty} |k(\xi)| d\xi = 0$. Zatem $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_Y(\tau) = 0$. Ponadto, z uwagi na nierówność $|k(\eta - h) - k(\eta)| \leq |h| |k'(\eta)|$, możemy napisać, że

$$\begin{aligned} |R_Y(\tau + h) - R_Y(\tau)| &\leq \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} |[k(\xi - \tau - h) - k(\xi - \tau)] k(\xi)| d\xi \\ &\leq \sigma_U^2 |h| \max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| \int_0^{\infty} |k(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $\max_{t \in (0, \infty)} |k'(t)| < \infty$, patrz własność 4.3, s. 62, dochodzimy zatem do wniosku, że $R_Y(\tau)$ jest funkcją ciągłą. Zatem (d) zostało zweryfikowane.

Wyliczając transformatę Fouriera funkcji korelacji, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \tau)k(\xi)e^{-j\omega\tau} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - \tau)e^{j\omega(\xi - \tau)}k(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi d\tau \\ &= \sigma_U^2 \tilde{K}(-\omega)\tilde{K}(\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{K}(\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej $k(t)$. Ponieważ $\tilde{K}(\omega) = K(j\omega)$ oraz $\tilde{K}(-\omega) = K(-j\omega) = K^*(j\omega)$, zatem $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(j\omega)|^2$, co oznacza, że (e) jest prawdziwe.

Na koniec zauważmy, że

$$\begin{aligned} R_{YU}(\tau) &= \mathbb{E}\{Y(t + \tau)U(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\mathbb{E}\{U(t + \tau - \xi)U(t)\}d\xi \\ &= \sigma_U^2 \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)\delta(\xi - \tau)d\xi = \sigma_U^2 k(\tau), \end{aligned}$$

co oznacza, że (f) jest prawdziwe. Możemy więc stwierdzić, że własność została w całości zweryfikowana. ■

Przykład 7.1 Niech $U(t)$ będzie białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji $\delta(\tau)$ i niech $K(s) = 1/(s + 1)$. Ponieważ $k(t) = e^{-t}$ dla $t \geq 0$, mamy więc $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$, $S_Y(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$, $\mathbb{E}Y(t) = 0$, $\mathbb{E}Y^2(t) = 1/2$ oraz $R_{YU}(\tau) = e^{-\tau}$.

Ćwiczenie 7.1 Wyznaczyć $R_Y(\tau)$, $S_Y(\tau)$ oraz $R_{YU}(\tau)$, jeśli $R_U(\tau) = \delta(\tau)$ oraz

- (a) $K(s) = 1/(s + 1)^2$,
- (b) $K(s) = 1/(s + 1)(s + 2)$.

Ćwiczenie 7.2 Niech $U(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, przy czym $R_\xi(\tau) = \delta(\tau)$. Wyznaczyć $R_U(\tau)$, $R_Y(\tau)$ i $R_{YU}(\tau)$, jeśli $K(s) = 1/(s + 1)$ oraz

- (a) $\varphi(t) = c$,
- (b) $\varphi(t) = \sin \omega t$.

Załóżmy teraz, że $U(t)$ jest w dalszym ciągu białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(\tau) = \delta(\tau)$, lecz transmitancja $K(s)$ systemu jest

taka, że $l = m$, co oznacza, że

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)},$$

gdzie $M(s) = a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0$ oraz $L(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$. Wykażemy, że

$$\mathbb{E}Y^2(t) = \infty. \quad (7.2)$$

Dowód zaczniemy od tego, że $K(s) = \alpha - G(s)$, gdzie $\alpha = b_m/a_m$, oraz $G(s) = P(s)/M(s)$, przy czym $P(s) = \alpha M(s) - L(s)$ jest wielomianem stopnia niższego niż m . Zatem $Y(t) = \xi(t) - \eta(t)$, gdzie $\xi(t) = \alpha U(t)$. Sygnał $\eta(t)$ jest natomiast wyjściem systemu o transmitancji $G(s)$ pobudzanego sygnałem $U(t)$. W rezultacie więc znajdujemy następujące funkcje korelacji: $R_\xi(\tau) = \alpha^2 \delta(\tau)$, $R_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda$ oraz

$$\begin{aligned} R_{\eta\xi}(\tau) &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \mathbb{E}\{U(\tau - \lambda)U(0)\}d\lambda \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \delta(\tau - \lambda)d\lambda = \alpha g(\tau). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= R_\xi(\tau) + R_\eta(\tau) - R_{\xi\eta}(\tau) - R_{\eta\xi}(\tau) \\ &= \alpha^2 \delta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda - \alpha g(\tau) - \alpha g(-\tau) \\ &= \alpha^2 \delta(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\lambda - \tau)d\lambda - \alpha g(|\tau|). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $S_Y(\omega) = \alpha^2 + |G(j\omega)|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}[G(j\omega)]$. Zatem rzeczywiście (7.2) zachodzi, ponieważ $\mathbb{E}Y^2(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega)d\omega = \infty$, patrz wzór (C.2), s. 250, co jest spowodowane tym, że $l = m$.

Przykład 7.2 Niech teraz $R_U(\tau) = \delta(\tau)$ oraz $K(s) = s/(s+1)$. Ponieważ $K(s) = 1 - 1/(s+1)$, a więc $Y(t) = U(t) - \eta(t)$, gdzie $\eta(t)$ jest wyjściem systemu o transmitancji $1/(s+1)$ pobudzanego sygnałem $U(t)$. Zatem $S_Y(\omega) = 1 + 1/(\omega^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(1/(j\omega + 1))$, co jest równe $1 - (\omega^2 + 1)$, skąd wynika, patrz przykład C.1, s. 250, że $R_Y(\tau) = \delta(\tau) - e^{-|\tau|}$.

Ćwiczenie 7.3 Wykazać, że jeśli sygnał wejściowy $U(t)$ jest stacjonarnym, białym szumem o średniej m_U i funkcji korelacji $R_U(\tau) = \sigma_U^2 \delta(\tau) + m_U^2$, to:

- (a) $\mathbb{E}Y(t) = m_U \int_0^\infty k(\xi) d\xi$,
- (b) $\text{var } Y(t) = \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi) d\xi$,
- (c) $\mathbb{E}Y^2(t) = m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi) d\xi \right)^2 + \sigma_U^2 \int_0^\infty k^2(\xi) d\xi$,
- (d) $R_Y(\tau) = \sigma_U^2 \int_{-\infty}^\infty k(\xi) k(\xi - \tau) d\xi + m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi) d\xi \right)^2$,
- (e) $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną,
- (f) $R_Y(\tau) \rightarrow m_U^2 \left(\int_0^\infty k(\xi) d\xi \right)^2$, gdy $\tau \rightarrow \infty$,
- (g) $R_{YU}(\tau) = \sigma_U^2 k(\tau) + m_U^2 \int_0^\infty k(\xi) d\xi$.

7.3 System przy pobudzeniu skorelowanym

Wykazaliśmy, patrz własność 7.1, że funkcja korelacji wyjścia systemu pobudzanego białym szumem jest ograniczona, tzn. że $|R_U(\tau)| \leq R_U(0) < \infty$. Założymy teraz, że sygnał o takiej właśnie funkcji korelacji jest wejściem systemu stabilnego o transmitancji $K(s)$. Jego wyjściem jest $Y(t)$.

Twierdzenie 7.3 Jeśli system jest stabilny i $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o ograniczonej funkcji korelacji (czyli nie jest białym szumem), to całka średniokwadratowa (7.1) istnieje.

Dowód. Korzystamy z twierdzenia 7.1 (patrz także wniosek C.1, s. 252) oraz tego, że $\int_0^\infty |k(\tau)| < \infty$. ■

Zatem $Y(t)$ jest, dla ustalonego t , zmienną losową, a rodzina zmiennych losowych $Y(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, procesem stochastycznym. Teraz wykażemy, że jest to proces stacjonarny, drugiego rzędu o zerowej średniej.

Twierdzenie 7.4 Niech $l < m$ i niech system będzie stabilny. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o ograniczonej funkcji korelacji (czyli nie jest białym szumem) i zerowej średniej, to $Y(t)$ jest także stacjonarnym procesem drugiego rzędu o zerowej średniej.

Dowód. Ponieważ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y^2(t) &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t k(t-\xi) k(t-\eta) R_U(\xi-\eta) d\xi d\eta \\ &= R_U(0) \left(\int_0^\infty |k(\tau)| d\tau \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

zatem $Y(t)$ jest procesem drugiego rzędu. Uwzględniając to, że $\mathbb{E}U(t) = 0$ oraz $\int_0^\infty |k(\tau)|d\tau < \infty$, otrzymujemy $\mathbb{E}Y(t) = \int_0^\infty k(\tau)d\tau\mathbb{E}U(t) = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{Y(t+\tau)Y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta)\mathbb{E}\{U(t+\tau-\xi)U(t-\eta)\}d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta)R_U(\tau-\xi+\eta)d\xi d\eta\end{aligned}$$

nie zależy od t . Proces $Y(t)$ jest zatem stacjonarny, co kończy dowód. ■

Własności procesu $Y(t)$ są podane poniżej.

Własność 7.2 Niech $l < m$. Jeśli $U(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(\tau)$, to

- (α) $Y(t)$ jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu, $\mathbb{E}Y(t) = 0$,
- (β) $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta)R_U(\eta+\xi-\tau)d\xi d\eta$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta-\tau)R_U(\eta-\xi)d\xi d\eta$,
- (γ) $R_Y(\tau)$ jest ciągłą funkcją ograniczoną i $R_Y(\tau) \rightarrow 0$, gdy $\tau \rightarrow \infty$,
- (δ) $S_Y(\omega) = |K(j\omega)|^2 S_U(\omega)$,
- (ε) $R_{YU}(\tau) = \int_0^\infty k(\xi)R_U(\xi-\tau)d\xi$, czyli $S_{YU}(\omega) = K(\omega)S_U(\omega)$.

Dowód. Punkt (α) został wykazany wcześniej, natomiast (β) wynika z tego, że

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)k(\eta)\mathbb{E}\{U(t+\tau-\xi)U(t-\eta)\}d\xi d\eta.$$

Punkt (γ) weryfikujemy podobnie jak w § 7.2. Aby dowieść, że (δ) jest prawdziwe zauważamy, iż gęstość widmowa $S_Y(\omega)$ jest równa

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty k(\xi)k(\eta)R_U(\tau+\xi-\eta)e^{-j\omega\tau}d\xi d\eta d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{j\omega\xi}k(\eta)e^{-j\omega\eta}R_U(\tau+\xi-\eta)e^{-j\omega(\tau+\xi-\eta)}d\xi d\eta d\tau,\end{aligned}$$

która to wielkość jest z kolei równa

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)e^{j\omega\eta}d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau \\ &= K(-j\omega)K(j\omega)S_U(\omega).\end{aligned}$$

Aby wykazać (ε) , wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} R_{YU}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \mathbb{E}\{U(t + \tau - \xi)U(t)\} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) R_U(\xi - \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Własność została zatem zweryfikowana w całości. ■

Zauważmy, że z (β) wynika

$$\frac{d}{d\tau} R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) k'(\eta - \tau) R_U(\eta - \xi) d\xi d\eta.$$

Ponieważ $k'(t)$ jest funkcją ciągłą, proces $Y(t)$ można więc różniczkować w sensie średniokwadratowym, patrz § C.1.3.

Przykład 7.3 Wejściem $U(t)$ systemu o transmitancji $K(s) = 1/(2s + 1)$ jest wyjście systemu z przykładu 7.1, co oznacza, że $R_U(\tau) = e^{-|\tau|}$. Ponieważ $S_U(\omega) = 1/(\omega^2 + 1)$, zatem $S_Y(\omega) = 1/(4\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)$. Zauważając, że $1/(4\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1) = 4/3(4\omega^2 + 1) - 1/3(\omega^2 + 1)$, patrz także przykład C.1, s. 250, dochodzimy do wniosku, że $R_Y(\tau) = (4/3)e^{-2|\tau|} - (1/3)e^{-|\tau|}$. Wynika stąd, że $Y(t) = \xi(t) - \eta(t)$, gdzie $\xi(t)$ i $\eta(t)$ są nieskorelowanymi wzajemnie procesami (tzn. takimi, że $R_{\xi\eta}(\tau) \equiv R_{\eta\xi}(\tau) \equiv 0$) o gęstościach widmowych $S_{\xi}(\omega) = 4/3(4\omega^2 + 1)$ i $S_{\eta}(\omega) = 1/3(4\omega^2 + 1)$, czyli funkcjach korelacji $R_{\xi}(\tau) = (4/3)e^{-2|\tau|}$ oraz $R_{\eta}(\tau) = (1/3)e^{-|\tau|}$.

7.4 Regulacja w obecności sygnału losowego

Zbadamy teraz zachowanie układu automatycznej regulacji w sytuacjach, gdy działają nań sygnały o charakterze losowym. Przypominamy przy tym, że $K(s) = L(s)/M(s)$ jest transmitancją układu otwartego, w której $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami o stopniach l oraz m . Ponadto

$$K_E(s) = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}$$

oraz

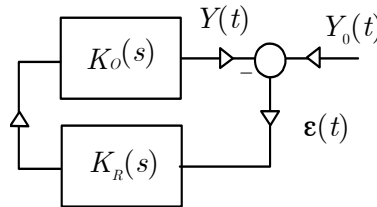
$$K_Z(s) = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)}$$

są odpowiednio transmitancją uchybową i systemu zamkniętego. Zakładamy przy tym, że system jest stabilny.

Wartość zadana procesem stochastycznym

Sygnal zadany $Y_0(t)$ jest teraz stacjonarnym procesem stochastycznym o gęstości widmowej $S_{Y_0}(\omega)$, patrz rys. 7.2. Ponieważ $S_E(\omega) = |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega)$, zatem – jak to wynika z (C.2), s. 250 –

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varepsilon^2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega.\end{aligned}$$



Rys. 7.2. Układ automatycznej regulacji. Sygnal wartości zadanej białym szumem

Założmy teraz, że sygnał $Y_0(t)$ ma zerową średnią, tzn. że $S_{Y_0}(\omega) = \text{var}[Y_0]$. W sytuacji takiejj

$$\mathbb{E}\varepsilon^2(t) = \frac{\text{var}[Y_0]}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Ponieważ zwykle jest tak, że $l < m$, więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega = \infty.$$

Zatem $\mathbb{E}\varepsilon^2(t) = \infty$, skąd wynika, że białego szumu nie można niestety skutecznie śledzić.

Argumentacja podana poniżej kończy się identycznym wnioskiem. Nie odwołuje się jednak do metod częstotliwościowych i operuje jedynie czasem. Ponieważ sygnał $\varepsilon(t)$ można uważać za wyjście systemu o transmitancji uchybowej $K_E(s)$ pobudzanego białym szumem $Y_0(t)$, a zatem

$$\text{var}[\varepsilon(t)] = \text{var}[Y_0] \int_0^{\infty} k_E^2(\xi) d\xi,$$

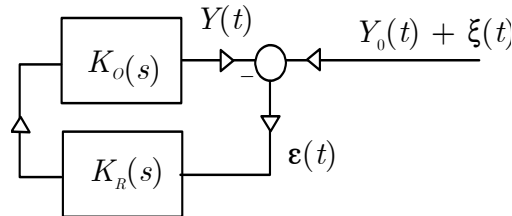
gdzie $k_E(t) \hat{=} K_E(s)$, patrz ćwiczenie 7.3. Ponieważ $K_E(s) = 1 - K_Z(s)$ oraz $l < m$, więc

$$k_E(t) = \delta(t) - k_Z(t),$$

gdzie $\int_0^\infty k_Z^2(\xi) d\xi < \infty$, z uwagi na to, że system zamknięty jest stabilny oraz stopień wielomianu $L(s)$ jest niższy od stopnia wielomianu $L(s) + M(s)$, patrz własność 4.8, s. 67. Ze względu na to jednak, że $k_E(t)$ zawiera impuls Diraca, to $\int_0^\infty k_E^2(\xi) d\xi = \infty$, patrz (A.13), s. 207, skąd w sposób oczywisty wynika, że $\text{var}[\varepsilon] = \infty$. Oznacza to, że wariancja błędu przy śledzeniu białego szumu jest nieskończenie wielka.

Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera sygnał zadany $Y_0(t)$ zaszumiony stacjonarnym losowym sygnałem $\xi(t)$, co przedstawia rys. 7.3. Zakładamy przy tym, że $\mathbb{E}\xi(t) = 0$ i przez σ_ξ^2 oznaczamy wariancję zmiennej losowej $\xi(t)$. Należy zwrócić uwagę, że teraz o jakości systemu świadczy nie sygnał $\varepsilon(t)$, lecz $e(t) = Y_0(t) - Y(t)$. Błąd $e(t)$ powinien być – w odpowiednim sensie – mały.



Rys. 7.3. Układ automatycznej regulacji. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Ponieważ $\varepsilon(t) = Y_0(t) - Y(t) + \xi(t)$, a zatem $\mathfrak{L}\{e(t)\} = \mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} - \mathfrak{L}\{\xi(t)\}$. Biorąc teraz pod uwagę to, że $\mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\} = K_E(s) [Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}]$, otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{e(t)\} &= K_E(s) [Y_0(s) + \mathfrak{L}\{\xi(t)\}] - \mathfrak{L}\{\xi(t)\} \\ &= K_E(s)Y_0(s) + [K_E(s) - 1] \mathfrak{L}\{\xi(t)\}. \end{aligned}$$

Zatem

$$e(t) = e_d(t) + e_\xi(t),$$

gdzie $\mathfrak{L}\{\varepsilon_d(t)\} = K_E(s)Y_0(s)$ oraz

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{e_\xi(t)\} &= [K_E(s) - 1] \mathfrak{L}\{\xi(t)\} \\ &= -\frac{L(s)}{L(s) + M(s)} \mathfrak{L}\{\xi(t)\}.\end{aligned}\quad (7.3)$$

Błąd $e(t)$ zawiera więc dwie składowe, a mianowicie składową $e_d(t)$ pochodzącą od $Y_0(t)$ oraz $e_\xi(t)$, której przyczyną jest szum $\xi(t)$. Jeśli $Y_0(t)$ jest natury deterministycznej, to $e_d(t)$ także. Składowa tego typu (tzn. deterministycznego) była już przedmiotem naszej analizy, patrz rozdział 6. Jeśli sygnał $Y_0(t)$ jest losowy, to analizę tej składowej błędu należy przeprowadzić tak, jak zrobiono to wobec systemu przedstawionego na rys. 7.2.

Teraz zbadamy składową losową $e_\xi(t)$ błędu pochodzącą od szumu. Z (7.3) wynika, że

$$S_{e_\xi}(\omega) = \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_\xi(\omega),$$

co – z uwagi na (C.2), s. 250 – doprowadza do wniosku, że

$$\mathbb{E}e_\xi^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 S_\xi(\omega) d\omega.$$

Jeśli zatem $\xi(t)$ jest białym szumem, to

$$\mathbb{E}e_\xi^2(t) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{L(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Gdy system jest taki, że $l < m$, wówczas całka w powyższym wyrażeniu jest skończona. Można wtedy skutecznie regulować w obecności białego szumu, tym bardziej skorelowanego.

Zauważmy teraz, że $e_\xi(t)$ jest wyjściem systemu o transmitancji $-K_\xi(s)$ pobudzanego białym szumem $\xi(t)$. Zatem, patrz ćwiczenie 7.3,

$$\mathbb{E}e_\xi^2(t) = \sigma_\xi^2 \int_0^\infty k_Z^2(\xi) d\xi,$$

gdzie $k_Z(t) \hat{=} K_Z(s)$. Jeśli transmitancja układu otwartego jest taka, że $l < m$, to $\int_0^\infty k_Z^2(\xi) d\xi < \infty$, patrz własność 4.8, s. 67.

Ćwiczenie 7.4 Niech $K_O(s) = 1/(s+1)$ oraz $K_R(s) = k$. Wyznaczyć $\mathbb{E}e_\xi^2(t)$ jeśli:

- (a) $R_\xi(\tau) = \delta(\tau)$,
- (b) $R_\xi(\tau) = e^{-|\tau|}$.

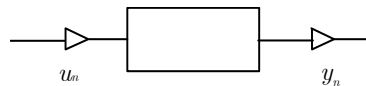
Ćwiczenie 7.5 Niech $K_O(s) = 1/(s + 1)^3$ oraz $K_R(s) = k$. Zakładając, że system zamknięty jest stabilny, wyznaczyć $\mathbb{E}\xi^2(t)$ jeśli:

- (a) $R_\xi(\tau) = \delta(\tau)$,
- (b) $R_\xi(\tau) = e^{-|\tau|}$.

Rozdział 8

Opisy systemów dyskretnych

Podamy teraz różne sposoby opisu własności liniowych, dynamicznych systemów dyskretnych, czyli takich, w których czas biegnie w sposób dyskretny. System przedstawiony na rys. 8.1 przekształca wejściowy ciąg liczbowy $\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots$ w ciąg wyjściowy $\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$. Ciągi te, czyli sygnały, oznaczymy jako $\{u_n\}$ oraz $\{y_n\}$, a gdy nie będzie zachodzić obawa nieporozumienia, będziemy pisać po prostu u_n oraz y_n .



Rys. 8.1. Dyskretny system dynamiczny

8.1 Równanie różnicowe

Zasadniczym opisem liniowego, dyskretnego systemu dynamicznego jest następujące, liniowe równanie różnicowe:

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = b_l u_{n-m+l} + \dots + b_0 u_{n-m}, \quad (8.1)$$

przy czym $l \leq m$. Zakładamy przy tym, że $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$ oraz $b_l \neq 0$. Liczbę m nazywa się rzędem równania, czyli także systemu, patrz także § 8.2.2. Warunkiem początkowym jest

$$y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m},$$

patrz § B.5. Jeśli $y_{-1} = y_{-2} = \dots = y_{-m} = 0$, to mówimy, że jest on zerowy. Należy zwrócić uwagę na to, że w a_i , b_i indeksy rozróżniają współczynniki równania, natomiast w u_i oraz y_i oznaczają chwilę.

Równanie to opisuje zachowanie się systemu, tzn. określa jego reakcję na pobudzenie. Przez pobudzenie rozumiemy ciąg wejściowy taki, że $u_n = 0$ dla $n = \dots, -2, -1$, tzn. taki, który rozpoczyna się w istocie w chwili $n = 0$. Aby go określić, wystarczy zatem podać u_0, u_1, u_2, \dots . Pobudzeniem zerowym jest ciąg $u_n = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ (i siłą rzeczy, dla $n = \dots, -2, -1$). Reakcją jest natomiast ciąg y_0, y_1, y_2, \dots

W celu wyznaczenia reakcji systemu, tzn. rozwiązania równania, wykorzystamy narzędzie jakim jest transformacja \mathcal{Z} . Dokonana wobec obydwu jego stron doprowadza do równania jak poniżej:

$$\begin{aligned} & (a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m})Y(z) - V(z^{-1}) \\ &= (b_lz^{-m+l} + \dots + b_0z^{-m})U(z), \end{aligned}$$

przy czym $V(z^{-1})$ jest wielomianem stopnia $m-1$ argumentu z^{-1} o współczynnikach zależnych od warunku początkowego $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}$ oraz a_0, \dots, a_m , patrz § B.5. Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_lz^{-m+l} + \dots + b_0z^{-m}}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}U(z) \\ &+ \frac{V(z^{-1})}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$V(z^{-1}) = w_{m-1} + w_{m-2}z^{-1} \dots + w_0z^{-m+1} \quad (8.2)$$

jest wielomianem argumentu z^{-1} , którego współczynniki, jak już wspomniano, zależą od warunku początkowego i a_0, \dots, a_m . Zatem

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_lz^l + b_{l-1}z^{l-1} + \dots + b_0}{a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}U(z) \\ &+ \frac{z^mV(z^{-1})}{a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}. \end{aligned}$$

Oznaczając

$$M(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0, \quad (8.3)$$

$$L(z) = b_lz^l + b_{l-1}z^{l-1} + \dots + b_0 \quad (8.4)$$

oraz

$$W(z) = z^{m-1}V(z^{-1}) = w_{m-1}z^{m-1} + \dots + w_1z + w_0, \quad (8.5)$$

możemy w końcu napisać, że

$$Y(z) = \frac{zW(z)}{M(z)} + \frac{L(z)}{M(z)}U(z), \quad (8.6)$$

gdzie $W(z)$ jest wielomianem stopnia $m - 1$. Wynika stąd, że

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{L(z)}{M(z)}U(z) \right\}, \quad (8.7)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Zaznaczmy jeszcze, że $M(z)$ nazywa się wielomianem charakterystycznym równania różnicowego, czyli także systemu, a $M(z) = 0$ równaniem charakterystycznym równania, a także systemu.

Reakcja systemu zależy zatem od:

- ▶ pobudzenia,
- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu.

Pierwsza składowa odpowiedzi zależy od:

- ▶ warunku początkowego,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie od pobudzenia u_n .

Jest ona oczywiście odpowiedzią systemu na pobudzenie zerowe, gdyż w takiej sytuacji $U(z) = 0$. Jest ona zatem rozwiązaniem następującego równania jednorodnego:

$$a_my_n + a_{m-1}y_{n-1} + \dots + a_0y_{n-m} = 0. \quad (8.8)$$

Druga składowa zależy natomiast od:

- ▶ pobudzenia,
- ▶ własności systemu,
- ▷ lecz nie zależy od warunku początkowego.

Jest ona reakcją systemu na pobudzenie u_n przy zerowym warunku początkowym, wtedy bowiem $W(z) = 0$.

Przykład 8.1 System opisany jest równaniem różnicowym

$$y_n - \lambda y_{n-1} = \beta u_n.$$

Wyznamy jego odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ przy warunku początkowym y_{-1} . Dokonując obustronnej transformacji \mathcal{Z} otrzymujemy

$$(1 - \lambda z^{-1})Y(z) + y_{-1} = \beta U(z),$$

czyli

$$Y(z) = -\frac{y_{-1}}{1 - \lambda z^{-1}} + \frac{\beta}{1 - \lambda z^{-1}}U(z).$$

Ponieważ $U(z) = 1$, zatem

$$Y(z) = -y_{-1}\frac{z}{z - \lambda} + \beta\frac{z}{z - \lambda}$$

oraz

$$y_n = -y_{-1}\lambda^n + \beta\lambda^n.$$

Uwaga 8.1 Niekiedy, po dokonaniu przesunięcia, równanie (8.1) zapisuje się w nieco innej postaci, a mianowicie:

$$a_m y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + \dots + a_0 y_n = b_l u_{n+l} + \dots + b_0 u_n.$$

8.2 Transmitancja

8.2.1 Definicja. Liniowość systemu

Definicja 8.1 Transmitancją systemu dyskretnego nazywamy funkcję

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)} = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}.$$

Poniższa własność jest oczywista.

Własność 8.1 Przy zerowym warunku początkowym,

$$Y(z) = K(z)U(z).$$

Transmitancja wiąże zatem transformaty \mathcal{Z} pobudzenia i odpowiedzi systemu (jedynie) w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy. Jest ona funkcją wymierną i jej bieguny są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $M(z)$.

Z tego, że $a_0 \neq 0$ wynika poniższa własność.

Własność 8.2 *Transmitancja systemu opisywanego przez równanie różnicowe (8.1) nie ma bieguna w punkcie $z = 0$.*

Z własności 8.1 wynika ważne twierdzenie dotyczące liniowości systemu.

Twierdzenie 8.1 (liniowość systemu) *Niech warunek początkowy będzie zerowy. Niech na pobudzenia \bar{u}_n, \tilde{u}_n i u_n reakcjami systemu będą odpowiednio \bar{y}_n, \tilde{y}_n i y_n . Odpowiedziami na wejścia $\alpha\bar{u}_n + \beta\tilde{u}_n, u_{n-k}$, ($k \geq 0$) oraz $\sum_{i=0}^n u_i$ są odpowiednio $\alpha\bar{y}_n + \beta\tilde{y}_n, y_{n-k}$, oraz $\sum_{i=0}^n y_i$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 8.1. ■

Jeśli zatem warunek początkowy jest zerowy, to operacji liniowej na sygnale wejściowym odpowiada taka sama operacja na sygnale wyjściowym.

Własność 8.3 *W transmitancji rzeczywistego systemu dyskretnego $l \leq m$.*

Wyjaśnimy teraz istotę powyższej własności. Przypuśćmy, że jest inaczej, że np. $l = m + 1$. Wynika stąd, że $K(z) = \alpha z + \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^{-n}$. Niech teraz $\{u_n\} = \delta_{n-5}$ i niech ponadto warunek początkowy będzie zerowy. Ponieważ $U(z) = z^{-5}$, a zatem $Y(z) = K(z)U(z) = \alpha z^{-4} + \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^{-n-5}$. W rezultacie $y_4 = \alpha \neq 0$. Odpowiedź wyprzedza więc pobudzenie, co nie jest możliwe.

Korzystając z pojęcia transmitancji, odpowiedź systemu (8.7) na pobudzenie u_n przy dowolnym warunku początkowym można zapisać jako

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\} + \mathcal{Z}^{-1} \{K(z)U(z)\}. \quad (8.9)$$

8.2.2 Systemy z opóźnieniem

Do klasy systemów liniowych dołączamy teraz pewną, specyficzną rodzinę opisywaną równaniami różnicowymi z opóźnieniem, czyli równaniami o postaci jak poniżej

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = b_l u_{n-m+l} + \dots + b_0 u_{n-m} + b_{-1} u_{n-m-1} + \dots + b_{-k} u_{n-m-k}.$$

Wyrazy $u_{n-m-1}, \dots, u_{n-m-k}$ występujące po prawej stronie, którym towarzyszą współczynniki b z ujemnymi indeksami, oznaczają wystąpienie tzw. opóźnień. Największe z nich jest równe k . Jak łatwo sprawdzić

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_l z^{-m+l} + \dots + b_{-k} z^{-m-k}}{a_m + a_{m-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-m}} U(z) + \frac{V(z^{-1})}{M(z)} \\ &= \frac{L(z)}{z^k M(z)} + \frac{zW(z)}{M(z)}, \end{aligned}$$

gdzie $M(z)$ jest wielomianem jak w (8.3), $V(z^{-1})$ i $W(z) = z^{m-1}V(z^{-1})$ wielomianami pochodzącymi od warunku początkowego, patrz § 8.1, natomiast $L(z) = b_l z^{k+l} + \dots + b_0 z^k + b_{-1} z^{k-1} + \dots + b_{-k}$.

Przez analogię,

$$K(z) = \frac{L(z)}{z^k M(z)}$$

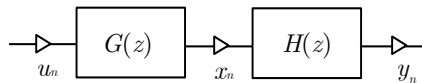
nazywa się transmitancją takiego systemu. Ma ona k -krotny biegun w punkcie $z = 0$. Zwracamy przy tym uwagę, że rzędem systemu jest m . W szczególności zatem, system o transmitancji $K(z) = z^{-k}$ opóźnia o k .

W dalszych rozważaniach nie będziemy odróżniać systemów bez opóźnień od tych z opóźnieniami. W związku z tym transmitancja będzie zawsze miała postać $K(z) = L(z)/M(z)$ niezależnie od tego, czy wielomian $M(z)$ ma jakikolwiek pierwiastek w punkcie $z = 0$, czy nie.

Przykład 8.2 Dla systemu o transmitancji $K(z) = L(z)/z^N$ równanie różnicowe ma postać $a_0 y_n = b_{-1} u_{n-1} + \dots + b_{-N} u_{n-N}$.

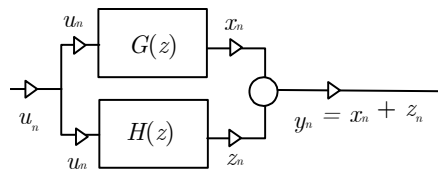
8.2.3 Transmitancja systemów złożonych

Łącząc systemy, otrzymuje się bardziej skomplikowane struktury, z których najprostszą jest szeregową, rys. 8.2, o transmitancji $G(z)H(z)$.



Rys. 8.2. Struktura szeregową

Transmitancją połączenia równoległego pokazanego na rys. 8.3 jest natomiast $G(z) + H(z)$.



Rys. 8.3. Struktura równoległa

Kolejną jest struktura z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, rys. 8.4, o wejściu u_n i wyjściu y_n . Jego transmitancję oznaczmy przez $K_Z(z)$. Uwzględniając

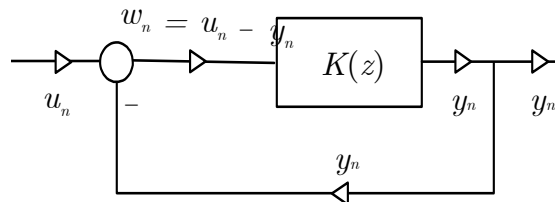
$$W(z) = U(z) - Y(z)$$

oraz

$$Y(z) = K(z)W(z),$$

otrzymujemy

$$K_Z(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K(z)}{1 + K(z)}.$$



Rys. 8.4. Sprzężenie zwrotne

8.3 Transmitancja widmowa

Definicja 8.2 *Transmitancją widmową nazywamy następującą funkcję argumentu ω :*

$$K(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} K(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

Z uwagi na to, że $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$, transmitancja widmowa jest funkcją periodyczną o okresie 2π . Jej graficzne przedstawienie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dla $\omega \in [0, \pi)$ nazywamy charakterystyką amplitudowo-fazową.

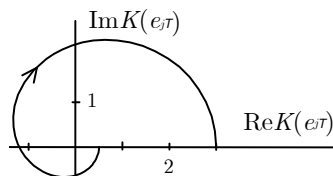
Przykład 8.3 *Dla systemu o transmitancji*

$$K(z) = \frac{6}{6z^2 + 5z + 1}$$

transmitancją widmową jest

$$K(e^{j\omega}) = \frac{6}{6e^{j2\omega} + 5e^{j\omega} + 1}.$$

Jej wykres, czyli charakterystykę amplitudowo-fazową, pokazano na rys. 8.5.



Rys. 8.5. Przykład charakterystyki amplitudowo-fazowej, przykład 8.3

Definicja transmitancji widmowej systemu dyskretnego, aczkolwiek być może dziwna na pierwszy rzut oka, pozostaje w ścisłym związku z pojęciem transmitancji widmowej systemu ciągłego oraz transformacją Laplace'a, patrz § B.6, s 248.

8.4 Odpowiedzi na standardowe pobudzenia

Standardowymi pobudzeniami stosowanymi przy analizie systemów dynamicznych są dyskretny impuls Diraca δ_n , skok jednostkowy 1_n oraz sinusoida $\sin \omega n$. Warto przypomnieć, że $K(z) = L(z)/M(z)$, gdzie $L(s)$ i $M(s)$ są wielomianami jak w (8.4) oraz (8.3).

8.4.1 Odpowiedź impulsowa

Zacniemy od definicji, która nawiązuje w sposób oczywisty do pojęcia odpowiedzi impulsowej systemu ciągłego.

Definicja 8.3 *Odpowiedzią impulsową $\{k_n\}$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie impulsem dyskretnym δ_n w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Związek pomiędzy odpowiedzią impulsową i transmitancją ustala poniższa własność.

Własność 8.4 *Odpowiedź impulsowa i transmitancja powiązane są następującym wzorem:*

$$k_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}.$$

Dowód. Wystarczy skorzystać z własności 8.1 oraz wziąć pod uwagę to, że $\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$. ■

Odpowiedź impulsowa jest więc oryginałem transmitancji $K(z)$. Podaną własność rozumiemy oczywiście w ten sposób, że $k_n = 0$ dla $n = -1, -2, \dots$ oraz $k_n = \mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}$ dla $n = 0, 1, \dots$. Aby ją znaleźć, oznaczmy jej bieguny jak następuje:

$$\left. \begin{array}{l} \blacktriangleright \text{rzeczywiste } \xi_1, \dots, \xi_p, \text{ różne o krotnościach } k_1, \dots, k_p, \\ \blacktriangleright \text{zespolone } (\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q), \text{ różne o krotnościach } \kappa_1, \dots, \kappa_q, \end{array} \right\} \quad (8.10)$$

przy czym $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$. Jest przy tym oczywiste, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = n$. Oznaczmy jeszcze

$$\theta_n(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(n+k-1)!}{n!}. \quad (8.11)$$

Ponadto \mathcal{D} jest operatorem opóźnienia, co oznacza, że $\mathcal{D}\{x_n\} = x_{n-1}$, $\mathcal{D}^2\{x_n\} = x_{n-2}$ itd.

Własność 8.5 (bieguny dowolne) Niech transmitancja $K(s)$ ma bieguny jak w (8.10). System ma następującą odpowiedź impulsową:

$$\begin{aligned} k_n = & \alpha_0 \delta_n + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) \xi_i^n\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \frac{|\beta_{ij}|}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j) |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_{ij})\}, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_0 = K(0)$,

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \frac{1}{\xi_i} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{dz^{k_i-j}} [(z - \xi_i)^{k_i} K(z)],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \frac{1}{\eta_i} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{dz^{\kappa_i-j}} [(z - \eta_i)^{\kappa_i} K(z)],$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$.

Dowód. Po dokonaniu rozkładu na ułamki proste otrzymujemy

$$\frac{1}{z} K(z) = \alpha_0 \frac{1}{z} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

a współczynniki $\alpha_0, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ znajdujemy bez trudu korzystając z twierdzenia B.1, s. 238. ■

Dla biegunów jednokrotnych odpowiedź impulsową można zapisać w znacznie prostszej postaci.

Wniosek 8.1 (bieguny jednokrotne) *Jeśli bieguny transmitancji oznaczone jak w (8.10) są jednokrotne, to system ma następującą odpowiedź impulsową:*

$$k_n = K(0)\delta_n + \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q \beta_i |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_i),$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{1}{\xi_i} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) K(z), \quad \beta_i = \frac{1}{\eta_i} \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i) K(z),$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i, \varphi_i = \arg \beta_i$.

Przykład 8.4 System o transmitancji $K(z) = z/(z + 1/3)$ ma odpowiedź impulsową $k_n = (-1/3)^n$.

Przykład 8.5 Dla systemu o transmitancji $K(z) = z(2z + 1)/(z - 2)(z + 3)$ odpowiedź impulsowa jest równa $k_n = 2^n + (-3)^n$.

Przykład 8.6 System o transmitancji $K(z) = 1/(z - 3)$ ma odpowiedź impulsową o postaci $k_n = (1/3)(3^n - \delta_n)$.

Przykład 8.7 System o transmitancji $K(z) = z^2/(z - \lambda)^2$ ma odpowiedź impulsową $k_n = n$.

Każdy biegun rzeczywisty i każda para biegunów zespolonych wnoszą do odpowiedzi odpowiednie składowe. Pojedynczy biegun rzeczywisty, powiedzmy ξ , jest przyczyną pojawienia się składowej ξ^n . Jeśli jego krotność jest k , to w odpowiedzi pojawiają się (z dokładnością do przesunięcia i stałego mnożnika) składowe

$$\xi^n, \theta_n(2)\xi^n, \dots, \theta_n(k)\xi^n.$$

Z lematu B.1, s. 242, wynika, że jeśli $|\xi| < 1$, to, niezależnie od krotności, składowe z nim związane maleją do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli $|\xi| = 1$ i biegun jest jednokrotny, to składowa ξ^n przez niego wnoszona jest ograniczona, lecz nie maleje do zera. Jeśli $|\xi| > 1$, to, z uwagi na wspomniany lemat, niezależnie

od krotności każda ze składowych odpowiedzi ma tę własność, że jej wartość bezwzględna narasta do nieskończoności, gdy $n \rightarrow \infty$.

Z kolei pojedyncza para $(\eta, \bar{\eta})$, $\eta = |\eta|e^{j\omega}$, powoduje, że w odpowiedzi obserwujemy składową typu $|\eta|^n \cos \omega n$. Jeśli para ta ma krotność k , to w odpowiedzi występują składowe (także z dokładnością do przesunięcia i stałego mnożnika)

$$|\eta|^n \theta_n(2) \cos \omega n, \dots, |\eta|^n \theta_n(k) \cos \omega n.$$

Każda para biegunów zespolonych wnosi składową periodyczną. Z lematu B.1 wynika, że jeśli $|\eta| < 1$, to, niezależnie od krotności, wszystkie składowe z nią związane maleją do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli natomiast $|\eta| > 1$, to amplitudy tych składowych narastają do nieskończoności.

Własność 8.6 Niech $p = m - l$. Dla $p = 0$

$$k_0 = \frac{b_m}{a_m} \neq 0,$$

natomiast dla $p \geq 1$,

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{p-1} = 0 \text{ i dopiero } k_p = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Jest oczywiste, że $K(z) = k_0 + k_1 z^{-1} + \dots$. Dla $p = 0$, zatem $k_0 = a_m/b_m \neq 0$. Dla $p = 1$, $k_0 = 0$ i $k_1 = b_l/a_m \neq 0$. Ogólnie, dla $p \geq 1$, sytuacja jest oczywista. ■

Powyższa własność orzeka, że im większa różnica pomiędzy stopniami wielomianów $M(z)$ i $L(z)$, tym dłużej odpowiedź impulsowa pozostaje równa zero, a zatem tym wolniejsza jest reakcja systemu.

Przykład 8.8 Dla $K(z) = (7z+6)/(2z^3+z^2+4z+5)$ znajdujemy $k_0 = k_1 = 0$, $k_2 = 7/2$.

Przykład 8.9 Dla $K(z) = (3z^2+3z+4)/(5z^2+6z+7)$ wyliczamy $k_0 = 3/5$.

Przykład 8.10 W systemie z opóźnieniem o transmitancji $K(z) = L(z)/z^N$, patrz przykład 8.2, jest tak, że $k_n = 0$ dla $n = N+1, N+2, \dots$. Odpowiedź impulsowa ustala się więc po skończonym czasie (po $N+1$ krokach); patrz także ćwiczenie B.6, s. 234.

8.4.2 Odpowiedź skokowa

Definicja 8.4 *Odpowiedzią skokową $\{\lambda_n\}$ nazywamy reakcję systemu na pobudzenie skokiem jednostkowym 1_n w sytuacji, gdy warunek początkowy jest zerowy.*

Podamy teraz relację między odpowiedzią skokową i transmitancją.

Własność 8.7 *Związek między odpowiedzią skokową i transmitancją określony jest wzorem*

$$\lambda_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} K(z) \right\}.$$

Jest przy tym oczywiste, że własność powyższą rozumiemy w ten sposób, że $\lambda_n = 0$ dla $n = \dots, -2, -1$ oraz $\lambda_n = (z/(z-1))\mathcal{Z}^{-1}\{K(z)\}$ dla $n = 0, 1, \dots$

Własność 8.8 (bieguny dowolne) *Niech teraz bieguny transmitancji $K(s)$ będą jak w (8.10), przy czym $\xi_1 = 1$. System ma następującą odpowiedź skokową:*

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j)\} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j)\xi_i^n\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \frac{|d_{ij}|}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{\theta_n(j)|\eta_i|^n \cos(n\omega_i + \psi_{ij})\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$c_{1j} = \frac{1}{(k_1+1-j)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^{k_1+1-j}}{dz^{k_1+1-j}} \left[(z-1)^{k_1} K(z) \right],$$

$$c_{ij} = \frac{1}{(k_i-j)!} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{dz^{k_i-j}} \left[(z-\xi_i)^{k_i} \frac{1}{z-1} K(z) \right],$$

$$d_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i-j)!} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{dz^{\kappa_i-j}} \left[(z-\eta_i)^{\kappa_i} \frac{1}{z-1} K(z) \right],$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\psi_{ij} = \arg d_{ij}$.

Dowód. Z własności 8.7 wynika, że odpowiedź skokowa jest oryginałem funkcji $zK(z)/(z-1)$. Dokonując rozkładu funkcji $K(z)/(z-1)$ na ułamki proste,

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z-1}K(z) &= \sum_{j=1}^{k_1+1} \frac{c_{1j}z}{(z-\xi_1)^j} + \sum_{i=2}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}z}{(z-\xi_i)^j} \\ &\quad + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{d_{ij}z}{(z-\eta_i)^j} + \frac{\bar{d}_{ij}z}{(z-\bar{\eta}_i)^j} \right], \end{aligned}$$

a współczynniki c_{1j} , c_{ij} , d_{ij} znajdujemy korzystając z twierdzenia B.1, s. 238. ■

Wniosek 8.2 (bieguny jednokrotne) *Jeśli bieguny transmitancji oznaczone jak w (8.10) są jednokrotne i wszystkie różne od 1, to:*

$$\lambda_n = K(1) + \sum_{i=1}^p c_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q |d_i| |\eta_i|^n \cos(n\omega_i + \psi_i),$$

gdzie

$$c_i = \frac{1}{\xi_i - 1} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)K(z),$$

$$d_i = \frac{1}{1 - \eta_i} \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i)K(z),$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\psi_i = \arg d_i$.

Związek między odpowiedzią skokową i impulsową określa poniższa własność.

Własność 8.9 *Odpowiedź impulsowa i skokowa powiązane są wzorem*

$$\lambda_n = \sum_{i=0}^n k_i, \text{ czyli } k_n = \lambda_n - \lambda_{n-1},$$

gdzie $\lambda_{-1} = 0$.

Kolejna w sposób oczywisty nawiązuje do własności 8.6 dotyczącej odpowiedzi impulsowej.

Własność 8.10 *Niech $p = m - l$. W odpowiedzi skokowej*

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \text{ i dopiero } \lambda_{p+1} = \frac{b_l}{a_m} \neq 0.$$

Przykład 8.11 Dla transmitancji jak w przykładzie 8.8 znajdujemy $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ oraz $\lambda_3 = 7/2$.

Przykład 8.12 Dla transmitancji jak w przykładzie 8.9 wyznaczamy $\lambda_0 = 0$ oraz $\lambda_1 = 3/5$.

Przykład 8.13 W systemie z opóźnieniem jak w przykładzie 8.2, tzn. w systemie o transmitancji $K(z) = L(z)/z^N$, jest tak, że $\lambda_N = \lambda_{N+1} = \dots$. Oznacza to, że odpowiedź skokowa ustala się po skończonym czasie (po N krokach); patrz także przykład 8.10.

8.5 Splot dyskretny

Z uwagi na to, że

$$\mathcal{Z}^{-1}\{K(z)U(z)\} = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i,$$

patrz s. 233, przy zerowym warunku początkowym, wyjście wyraża się wzorem

$$y_n = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i = \sum_{i=0}^n k_i u_{n-i},$$

gdzie k_i jest odpowiedzią impulsową.

Odpowiedź (8.9) systemu przy dowolnym warunku początkowym można teraz zapisać jako

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zW(z)}{M(z)}\right\} + \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i. \quad (8.12)$$

8.6 Równanie fazowe

Przy zerowym pobudzeniu zachowanie się systemu opisywane jest przez równanie jednorodne (8.8), które, przy założeniu $a_m = 1$, przyjmuje postać

$$y_n + a_{m-1}y_{n-1} + \dots + a_0y_{n-m} = 0.$$

Wektor

$$\boldsymbol{\xi}_n = [y_{n-m+1}, y_{n-m+2}, \dots, y_{n-1}, y_n]^T,$$

gdzie T oznacza transpozycję, nazywa się fazowym. Jak łatwo sprawdzić,

$$\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_{n-1},$$

$n = 0, 1, \dots$, przy czym

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Równanie powyższe nazywa się fazowym,

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = [y_{-m}, y_{m-1}, \dots, y_{-2}, y_{-1}]^T$$

jest jego warunkiem początkowym, a rozwiązanie ma postać:

$$\boldsymbol{\xi}_n = \mathbf{A}^{n+1}\boldsymbol{\xi}_{-1}.$$

Ciąg punktów $\boldsymbol{\xi}_{-1}, \boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots$ w przestrzeni fazowej nazywa się trajekcją fazową.

Zauważmy, że

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Zatem, dla $a_m = 1$, $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = M(\lambda)$, gdzie $M(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym (8.3) transmitancji. Zauważamy więc, że wielomiany charakterystyczne macierzy \mathbf{A} i transmitancji są wtedy identyczne.

Przy warunku początkowym $\boldsymbol{\xi}_{-1} = [y_{-m}, \dots, y_{-1}]^T$ reakcją systemu na wymuszenie zerowe jest

$$\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{n+1} \boldsymbol{\xi}_{-1} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\},$$

gdzie $\boldsymbol{\gamma} = [0, \dots, 0, 1]^T$, natomiast $W(z)$ jest wielomianem jak w (8.7). W rezultacie reakcję (8.12) systemu na wymuszenie u_n , przy dowolnym warunku początkowym, można zapisać jako

$$y_n = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{n+1} \boldsymbol{\xi}_{-1} + \sum_{i=0}^n k_{n-i} u_i. \quad (8.14)$$

8.7 Wektorowe równanie różnicowe

Równanie różnicowe

$$y_n + a_{m-1}y_{n-1} + \dots + a_0y_{n-m} = b_mu_n + \dots + b_0u_{n-m},$$

gdzie $a_0 \neq 0$, zapiszemy teraz w następującej postaci:

$$y_n + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y_{n-m} \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u_{n-m} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + b_mu_n, \quad (8.15)$$

przy czym $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{m-1}]^T$, $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{m-1}]^T$. Warunkiem początkowym jest oczywiście $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}$. Wykażemy, że system można opisać za pomocą równania wektorowego

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \boldsymbol{\beta}u_{n-1} \\ y_n &= \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}_n + \rho u_n, \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

$n = 0, 1, \dots$ W równaniu tym wektor \mathbf{x}_n ma wymiar m , $\boldsymbol{\gamma} = [0, \dots, 0, 1]^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{a}^T & \end{bmatrix}$$

oraz

$$\rho = b_m. \quad (8.17)$$

Aby określić wektor $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \dots, \beta_{m-1}]^T$, definiujemy macierz

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} & & & & a_0 & 0 \\ & & & & a_0 & a_1 & 0 \\ & & & & a_1 & a_2 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-4} & a_{m-3} & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-3} & a_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

i zauważamy, że jest ona nieosobliwa, gdyż $\det \boldsymbol{\Gamma} = -(-1)^{(m-1)(m-2)/2} a_0^{m-1}$. Dzięki temu definicja tego wektora jest następująca:

$$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\mathbf{b} - b_m \mathbf{a}), \quad (8.19)$$

co jest równoważne z tym, że

$$\mathbf{b} = -\Gamma\boldsymbol{\beta} + \rho\mathbf{a}. \quad (8.20)$$

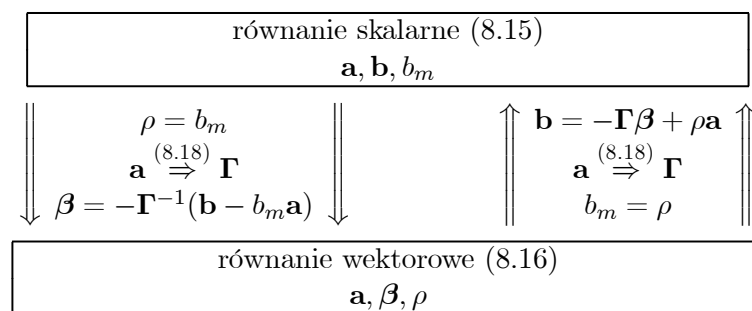
Ponadto

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} y_{n-m+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + (\mathbf{B} - \rho\mathbf{I}) \begin{bmatrix} u_{n-m+1} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (8.21)$$

przy czym

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ & \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ & & \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \beta_{m-2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Relacja pomiędzy równaniem skalarnym (8.15), tzn. \mathbf{a} , \mathbf{b} i b_m , oraz równaniem wektorowym (8.16), tzn. \mathbf{a} , $\boldsymbol{\beta}$ i ρ , jest wzajemnie jednoznaczna, co wyjaśnia podany poniżej schemat.



Dowód równoważności opisów. Dowód polega na weryfikacji (8.21), (8.17) oraz (8.20), czyli także (8.19). W dowodzie $x^{(i)}$ jest składową wektora \mathbf{x} , natomiast $x_j^{(i)}$ jej wartością w chwili j . Zaczniemy od wyznaczenia składowych wektora \mathbf{x}_{n-1} . Zapişmy w tym celu $m - 1$ pierwszych równań skalarnych

zawartych w zestawie (8.16) w następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned} x_n^{(1)} &= x_{n-1}^{(2)} + \beta_0 u_{n-1}, \\ &\vdots \\ x_{n-1}^{(m-3)} &= x_{n-1}^{(m-2)} + \beta_{m-4} u_{n-1}, \\ x_n^{(m-2)} &= x_{n-1}^{(m-1)} + \beta_{m-3} u_{n-1} \\ x_n^{(m-1)} &= x_{n-1}^{(m)} + \beta_{m-2} u_{n-1} \end{aligned} \right\}. \quad (8.22)$$

Z drugiego z równań (8.16) wynika, że $y_n = \gamma^T \mathbf{x}_n + \rho u_n$, czyli

$$y_n = x_n^{(m)} + \rho u_n, \quad (8.23)$$

skąd wynika, że

$$x_n^{(m)} = y_n - \rho u_n.$$

Wykonując operację przesunięcia, otrzymujemy $x_{n-1}^{(m)} = y_{n-1} - \rho u_{n-1}$, dzięki czemu ostatnie z równań w (8.22) przedstawiamy w następującej postaci:

$$x_n^{(m-1)} = y_{n-1} + \beta_{m-2} u_{n-1} - \rho u_{n-1},$$

skąd, po przesunięciu otrzymujemy $x_{n-1}^{(m-1)} = y_{n-2} + \beta_{m-2} u_{n-2} - \rho u_{n-2}$. Po uwzględnieniu rezultatu przesunięcia możemy przedostatnie z równań w (8.22) zapisać w postaci jak poniżej:

$$x_n^{(m-2)} = y_{n-2} + \beta_{m-2} u_{n-2} + \beta_{m-3} u_{n-1} - \rho u_{n-2}.$$

W następnym kroku dochodzimy do wniosku, że

$$x_n^{(m-3)} = y_{n-3} + \beta_{m-2} u_{n-3} + \beta_{m-3} u_{n-2} + \beta_{m-4} u_{n-1} - \rho u_{n-3}$$

i powtarzając powyższe czynności wielokrotnie, otrzymujemy w końcu

$$x_n^{(1)} = y_{n-m+1} + \beta_{m-2} u_{n-m+1} + \cdots + \beta_0 u_{n-1} - \rho u_{n-m+1}.$$

Wykazaliśmy więc, że

$$\begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(m-2)} \\ x_n^{(m-1)} \\ x_n^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-m+1} \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} u_{n-m+1} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \beta_{m-2}u_{n-m+1} + \cdots + \beta_1u_{n-2} + \beta_0u_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_{m-2}u_{n-2} + \beta_{m-3}u_{n-1} \\ \beta_{m-2}u_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

i zweryfikowaliśmy w ten sposób relację (8.21).

Przedostatnie ze wszystkich skalarnych równań w zestawie (8.16) ma następującą postać:

$$x_n^{(m)} = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{m-1}u_{n-1},$$

co, po uwzględnieniu (8.23), doprowadza do wniosku, że

$$y_n = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}_{n-1} + \beta_{m-1}u_{n-1} + \rho u_n.$$

Biorąc teraz pod uwagę (8.21), otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_n + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} y_{n-m} \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \\ = (-\mathbf{a}^T (\mathbf{B} - \rho \mathbf{I}) + [0, \dots, 0, \beta_{m-1}]) \begin{bmatrix} u_{n-m} \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} + \rho u_n. \end{aligned}$$

Porównanie tego z (8.15) doprowadza do wniosku, że związek (8.17) jest prawdziwy oraz, że

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T &= -\mathbf{a}^T (\mathbf{B} - \rho \mathbf{I}) + [0, \dots, 0, \beta_{m-1}] \\ &= -[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}] \begin{bmatrix} \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ & \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ & & \beta_{m-2} & \ddots & \beta_2 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \beta_{m-2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + [0, \dots, 0, \beta_{m-1}] + \rho \mathbf{a}^T, \end{aligned}$$

co jest z kolei równe

$$\begin{aligned}
 & -[\beta_0, \dots, \beta_{m-1}] \begin{bmatrix} & & & & a_0 & 0 \\ & & & & a_0 & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots & a_{m-4} & \\ & & & a_{m-4} & a_{m-3} & 0 \\ a_0 & \cdots & a_{m-4} & a_{m-3} & a_{m-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \rho \mathbf{a}^T \\
 & = -\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Gamma} + \rho \mathbf{a}^T.
 \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T$, otrzymujemy równość $\mathbf{b} = -\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\beta} + \rho\mathbf{a}$, co weryfikuje (8.20) i kończy dowód. ■

Aby znaleźć transmitancję systemu o równaniu (8.16), zakładamy zerowy warunek początkowy różnicowego równania wektorowego, tzn. że $\mathbf{x}_{-1} = \mathbf{0}$. Wykonujemy następnie obustronne przekształcenie \mathcal{Z} , otrzymując

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \boldsymbol{\beta}U(z).$$

Zatem

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta}U(z),$$

skąd wynika, że $Y(z) = [\boldsymbol{\gamma}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta} + \rho]U(z)$. Transmitancją jest więc

$$K(z) = \boldsymbol{\gamma}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta} + \rho.$$

W szczególności, dla $\rho = 0$ transmitancja jest równa

$$K(z) = \boldsymbol{\gamma}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Ponieważ $\mathcal{Z}^{-1}\{(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = \mathbf{A}^n$, patrz (B.12), a zatem odpowiedź impulsowa jest następująca:

$$k_n = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^n \boldsymbol{\beta}.$$

Ponieważ, przy zerowym warunku początkowym, $\mathbf{x}_n = \boldsymbol{\xi}_n$, więc dzięki powyższemu możemy odpowiedź (8.14) systemu na wymuszenie u_n zapisać w następującej postaci:

$$y_n = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^{n+1} \boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\gamma}^T \sum_{i=0}^n \mathbf{A}^{n-i} \boldsymbol{\beta} u_i.$$

Przykład 8.14 Dla równania

$$y_n + a_{m-1}y_{n-1} + \cdots + a_0y_{n-m} = b_{m-1}u_{n-1},$$

wyznaczamy $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{m-1}]^T$ oraz $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, b_{m-1}]^T$. Ponieważ $b_m = 0$, zatem $\rho = 0$. Jak łatwo sprawdzić, rozwiązaniem równania $\mathbf{b} = \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\beta}$ jest $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$. Równanie wektorowe ma więc następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}u_n \\ y_n &= \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{x}_n, \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

W systemie tym $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, a zatem $\mathbf{x}_n = [y_{n-m+1}, \dots, y_n]^T$, co oznacza, że \mathbf{x}_n jest po prostu wektorem fazowym $\boldsymbol{\xi}_n$. W rezultacie $K(z) = \boldsymbol{\gamma}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ oraz $k_n = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{A}^n \mathbf{b}$.

Przykład 8.15 Niech

$$y_{n+2} + a_1y_{n+1} + a_0y_n = b_1u_{n+1} + b_0u_n, \quad (8.25)$$

co oznacza, że $\mathbf{a} = [a_0, a_1]$, $\mathbf{b} = [b_0, b_1]$. Zatem

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -b_0/a_0 \\ -b_1 \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Ostatecznie

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \begin{bmatrix} -b_0/a_0 \\ -b_1 \end{bmatrix} u_n \\ y_n &= [0, 1] \mathbf{x}_n, \end{aligned} \right\}.$$

Ponieważ

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 \\ \beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

więc

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} y_{n-1} + \beta_0 u_{n-1} \\ y_n + \beta_1 u_{n-1} \end{bmatrix}.$$

8.8 Związki między opisami

Podobnie jak w systemach o czasie ciągłym, związek między równaniem różnicowym (tam różniczkowym), a transmitancją nie jest wzajemnie jednoznaczny. Świadczą o tym, na przykład, systemy o równaniach:

$$y_n + y_{n-1} = u_{n-1}$$

oraz

$$y_n + 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = u_{n-1} + 2u_{n-2}.$$

Transmitancja pierwszego jest równa

$$\frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{1}{z + 1}$$

i drugiego także, gdyż znajdując ją, dokonujemy skrócenia jak poniżej

$$\frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z + 2}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1}{z + 1}.$$

Równanie różnicowe i transmitancja, jak można wykazać, są opisami równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $M(z)$ i $L(z)$ nie mają wspólnych pierwiastków. Z tego też powodu założenie to zostało przez nas przyjęte na samym początku.

Odnośnie do pozostałych opisów, to, jak już wiemy, związek między skalarnym równaniem różnicowym a wektorowym jest wzajemnie jednoznaczny. Równanie fazowe jest w oczywistej relacji do lewej strony równania różnicowego. Powiązania między odpowiedzią impulsową czy skokową nie wymagają komentarza.

Rozdział 9

Stabilność systemów dyskretnych

9.1 Definicja

Przedmiotem naszego zainteresowania jest teraz system dyskretny o transmi-tancji jak poniżej:

$$K(z) = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}, \quad (9.1)$$

w której $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$. Warunkiem początkowym jest $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}$. Przez

$$z_1, z_2, \dots, z_m$$

oznaczymy pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0.$$

Omówimy podstawową dla nas własność jaką jest stabilność. Cechy tej będzie-my później żądać od dyskretnych systemów automatycznej regulacji.

Definicja 9.1 *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początko-wym,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

to system (9.1) nazywamy stabilnym.

Systemy, które nie są stabilne nazywamy niestabilnymi. Wśród niestabil-nych wyróżnia się klasę systemów na granicy stabilności.

Definicja 9.2 *Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,*

$$\sup_{n=0,1,2,\dots} |y_n| < \infty,$$

to mówimy, że system (9.1) jest na granicy stabilności.

9.2 Twierdzenie o stabilności

Twierdzenie 9.1 (stabilność) *System (9.1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1. \quad (9.2)$$

System jest więc stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz koła o promieniu 1 i środku $z = 0$, tzn. wewnątrz koła jednostkowego.

Aby wykazać prawdziwość podanego twierdzenia, udowodnimy najpierw pewien lemat. Zakładając w tym celu, zgodnie z definicją stabilności, zerowe pobudzenie, otrzymujemy równanie jednorodne o postaci

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-m} = 0.$$

Dokonując następnie transformacji \mathcal{Z} wobec obydwu stron tego równania, otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{zW(z)}{M(z)}, \quad (9.3)$$

gdzie

$$W(z) = w_{m-1} z^{m-1} + \dots + w_1 z + w_0$$

jest wielomianem stopnia $m - 1$, patrz (8.5), s. 131. Zatem

$$y_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{zW(z)}{M(z)} \right\}.$$

Zapowiedziany lemat ustala relację pomiędzy warunkiem początkowym oraz współczynnikami wielomianu $W(z)$.

Lemat 9.1 (o warunku początkowym) *Dla każdego wielomianu $W_0(z)$ stopnia $m - 1$ istnieje warunek początkowy taki, że $W(z) \equiv W_0(z)$.*

Dowód. Poszczególne współczynniki wielomianu $W(z)$, patrz (8.5), s. 131, są równe:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0 y_{-1}, \\ w_1 &= a_1 y_{-1} + a_0 y_{-2}, \\ &\vdots \\ w_{m-2} &= a_{m-2} y_{-1} + a_{m-3} y_{-2} + \cdots + a_0 y_{-m+1}, \\ w_{m-1} &= a_{m-1} y_{-1} + a_{m-2} y_{-2} + \cdots + a_1 y_{-m+1} + a_0 y_{-m}. \end{aligned}$$

Oznaczając $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}]^T$, $\mathbf{y} = [y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}]^T$, a także

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ \ddots & a_0 & & & \\ a_{m-3} & \ddots & \ddots & & \\ a_{m-2} & a_{m-3} & \ddots & a_0 & \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \ddots & a_0 \end{bmatrix},$$

możemy napisać $\mathbf{w} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$. Ponieważ $\det \mathbf{Q} = a_0^m \neq 0$, dla każdego zadanego wektora \mathbf{w}_0 współczynników wielomianu $W_0(z) = w_{m-1}z^{m-1} + \cdots + w_1z + w_0$, istnieje więc wektor warunku początkowego \mathbf{y} taki, że $\mathbf{y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w}_0$. ■

Dowód twierdzenia 9.1.

Wystarczalność warunku (9.2). Zaczniemy od relacji, patrz (B.8), s. 237,

$$\frac{z}{(z - \xi)^k} \hat{=} \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{ \theta_n(k) \xi^n \}, \quad (9.4)$$

w której ξ jest rzeczywiste. Ponieważ $|\theta_n| \leq 2^k n^k$, patrz lemat B.1, s. 242, ciąg po prawej stronie jest więc, co do bezwzględnej wartości, ograniczony przez

$$\frac{1}{(k-1)!} 2^k \mathcal{D}^{k-1} \{ n^k |\xi|^n \}.$$

Jeśli $|\xi| < 1$, to ciąg ten, a zatem także ciąg w (9.4), zbiega się do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Z kolei, dla zespolonego η otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\beta z}{(z - \eta)^k} + \frac{\bar{\beta} z}{(z - \bar{\eta}_i)^k} \\ \hat{=} & 2|\beta| \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{ |\eta|^n \theta_n(k) \cos(n\omega + \varphi) \}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

patrz (B.11), s. 237, gdzie $\omega = \arg \eta$ i $\varphi = \arg \beta$. Wykorzystując jeszcze raz lemat B.1, stwierdzamy, że bezwzględna wartość wyrażenia po prawej stronie jest ograniczona przez

$$2^{k+1}|\beta| \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{n^k |\eta|^n\}$$

i także zbiega się do zera. Zero jest zatem granicą ciągu w (9.5).

Wychodząc z (9.3) i oznaczając teraz bieguny transmitancji jak w (8.10), otrzymujemy

$$y_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij} z}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij} z}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij} z}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

gdzie α_{ij} i β_{ij} są współczynnikami rozkładu i, dzięki powyższym spostrzeżeniom, wnioskujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Konieczność warunku (9.2). Załóżmy, że system jest stabilny. Przypuśćmy najpierw, że z_1 jest rzeczywistym biegunem transmitancji. Z lematu 9.1 wynika, że istnieje warunek początkowy taki, że $W(z) = a_m \prod_{i=2}^m (z - z_i)$. Ponieważ $M(z) = a_m \prod_{i=1}^m (z - z_i)$, zatem, z uwagi na (9.3), dla warunku tego

$$\frac{zW(z)}{M(z)} = \frac{z}{z - z_1}.$$

Wynika stąd, że $y_n = z_1^n$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, a zatem $|z_1| < 0$.

Weźmy teraz pod uwagę parę sprzężonych biegunów zespolonych, powiedzmy (z_1, z_2) , gdzie $z_1 = |z_1|e^{j\omega_1}$ i $z_2 = |z_1|e^{-j\omega_1}$. Z lematu 9.1 wynika istnienie warunku początkowego, dla którego $W(z) = a_m |z_1| \prod_{i=3}^m (z - z_i)$. Przy nim

$$\frac{zW(z)}{M(z)} = \frac{|z_1|z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{|z_1|z}{z^2 - 2z|z_1|\cos \omega_1 + |z_1|^2},$$

skąd wynika, że $y_n = |z_1|^n \sin \omega_1 n$. Zatem $|z_1| < 1$ i $|z_2| < 1$.

Ponieważ powyższą argumentację można zastosować do każdego bieguna rzeczywistego i każdej pary zespolonej, wykazaliśmy więc, że ze stabilności wynika (9.2), co kończy dowód. ■

Twierdzenie 9.2 *System (9.1) jest na granicy stabilności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \dots, |z_m| \leq 1,$$

przy czym bieguny transmitancji, dla których zachodzą równości są co najwyżej jednokrotne.

Dowód. Dowód pozostawiamy czytelnikowi. ■

9.3 Własności systemów stabilnych

Dowody poniższych własności pomijamy, gdyż są podobne do tych, które odnoszą się do systemów o czasie ciągłym. Przypominamy, że $\{k_n\}$ jest odpowiedzią impulsową, a $\{\lambda_n\}$ skokową.

9.3.1 Odpowiedź impulsowa i skokowa

Własność 9.1 *Odpowiedź impulsowa ma każdą z poniższych własności:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny.

Ćwiczenie 9.1 *Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, to w systemie stabilnym $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.*

Ćwiczenie 9.2 *Niech $\rho = \max_i |z_i|$. Wykazać, że:*

▷ $|k_n| \leq c_1 \rho^n$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,

▷ $|k_n| \leq c_2 n^{m-1} \rho^n \leq c_3 \rho^{n+\varepsilon}$, pewne c_2, c_3 oraz dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Wskazówka: Skorzystać z (B.8), s. 237, oraz lematu B.1, s. 242.

Jeśli granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, gdzie λ_n jest odpowiedzią skokową, istnieje, to nazywamy ją wzmocnieniem systemu w stanie ustalonym. O jej istnieniu stanowi poniższa własność.

Własność 9.2 *Granica*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny. Ponadto, w systemie stabilnym wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = K(1).$$

Dowód. Dowód istnienia granicy jest podobny do dowodu własności 4.5, s. 63, dotyczącej systemu ciągłego i dlatego go pomijamy. Ponieważ dla systemu stabilnego granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ istnieje oraz

$$\mathcal{Z}\{\lambda_n\} = \frac{z}{z-1}K(z),$$

z twierdzenia B.3, s. 240, wnioskujemy zatem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = K(1)$. ■

System może mieć charakterystykę statyczną, tzn. charakterystykę wiążącą wysokość skoku na wejściu z poziomem, na którym ustala się reakcja systemu. Z powyższej własności wynika, że mają ją tylko systemy stabilne. Ich charakterystyka statyczna jest liniowa, tzn. $y = K(1)u$, co oznacza, że $K(1)$ jest jej współczynnikiem wzmocnienia. Ponieważ transmitancja takiego systemu nie ma bieguna w punkcie $z = 0$, więc $K(1)$ jest skończona.

Ćwiczenie 9.3 Niech system będzie stabilny. Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ istnieje, to $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ także. Ponadto, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, to

$$K(1) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}.$$

Ćwiczenie 9.4 Niech system będzie stabilny i niech $\rho = \max_i |z_i|$. Wykazać, że:

- ▷ $|k_n - \lim_{n \rightarrow \infty} k_n| \leq c_1 \rho^n$, pewne c_1 , jeśli wszystkie bieguny są różne,
- ▷ $|k_n - \lim_{n \rightarrow \infty} k_n| \leq c_2 \rho^{n+\varepsilon}$, pewne c_2 i dowolne $\varepsilon > 0$, dla dowolnych biegunów.

Wskazówka: Postąpić jak w ćwiczeniu 9.2.

9.3.2 Transmitancja widmowa

Reakcja na pobudzenie sinusoidalne

Zbadamy teraz reakcję systemu na pobudzenie ciągiem $u_n = \sin \omega n$, czyli dyskretną sinusoidą. Pamiętając, że

$$\mathcal{Z}\{\sin n\omega\} = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} = \frac{z \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})},$$

na mocy (8.9), s. 133, otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{z \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})}K(z) + \frac{zW(z)}{M(z)}.$$

Jak łatwo sprawdzić

$$\frac{z \sin \omega}{(z - e^{-j\omega})(z - e^{j\omega})} K(z) = \frac{\alpha(\omega)z}{z - e^{-j\omega}} + \frac{\bar{\alpha}(\omega)z}{z - e^{j\omega}} + \frac{R(z)}{M(z)},$$

czego oryginałem jest

$$2|\alpha(\omega)| \cos(\omega n + \arg \alpha(\omega)) + \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{R(z)}{M(z)} \right\},$$

gdzie $R(z)$ jest pewnym wielomianem stopnia nie większego niż m , natomiast $\alpha(\omega) = -(j/2)K(e^{j\omega})$, patrz (B.9), s 237. Zatem

$$y_n = |K(e^{j\omega})| \sin(\omega n + \varphi(\omega)) + p_n,$$

gdzie $\varphi(\omega) = \arg K(e^{j\omega})$ oraz $p_n = \mathfrak{Z}^{-1}\{R(z)/M(z)\} + \mathfrak{Z}^{-1}\{zW(z)/M(z)\}$. Z uwagi na stabilność systemu składowa przejściowa zanika, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$. Zatem, dla dużych n składowa p_n jest bardzo mała i nie popełniając dużego błędu możemy napisać, że na wyjściu systemu obserwujemy jedynie składową ustaloną, tzn. że

$$y_n \approx |K(e^{j\omega})| \sin(\omega n + \varphi(\omega)).$$

Składowa ustalona ma zatem następujące własności:

- jest dyskretną sinusoidą o tej samej pulsacji co pobudzenie,
- wzmacnienie amplitudowe zależy od ω i jest równe $|K(e^{j\omega})|$,
- przesunięcie fazowe zależy od ω i jest równe $\arg K(e^{j\omega})$.

Odpowiedź impulsowa

Dla systemu stabilnego

$$K(e^{j\omega}) = \bar{K}(\omega),$$

gdzie $\bar{K}(\omega)$ jest dyskretną transformacją Fouriera odpowiedzi impulsowej, patrz (B.16), s. 243.

Własność 9.3 Dla systemu stabilnego

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} K(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \omega n, \\ \operatorname{Im} K(e^{j\omega}) &= -\sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \omega n. \end{aligned}$$

Dowód. Spostrzeżenie, że

$$K(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \omega n - j \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \omega n$$

kończy dowód. ■

Własność 9.4 Dla systemu stabilnego

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}[K(e^{j\omega})] \cos(\omega n) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Im}[K(e^{j\omega})] \sin(\omega n) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Argumentacja jest podobna do tej w dowodzie własności 4.7, s. 67. ■

Z wzoru Parsewala (B.20), s. 244, wynika kolejna własność:

Własność 9.5 Dla systemu stabilnego

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

9.3.3 Równanie fazowe

Wektor fazowy ξ^* taki, że $\xi^* = \mathbf{A}\xi^*$ nazywamy punktem równowagi równania fazowego. Jest bowiem oczywiste, że trajektoria rozpoczynająca się w takim punkcie pozostaje w nim. Punkt równowagi ξ^* jest zatem rozwiązaniem równania $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$. Wynika stąd, że $\xi^* = \mathbf{0}$ jest punktem równowagi każdego równania fazowego. Jeśli $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \neq 0$, to jest to jedyny taki punkt. Jeśli natomiast $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$, tzn. jeśli $\lambda = 1$ jest pierwiastkiem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} , to jest ich więcej. Ponieważ wielomiany charakterystyczne macierzy \mathbf{A} i transmitancji są identyczne, § 8.6, równanie fazowe ma zatem więcej niż jeden punkt równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy transmitancja ma biegun w punkcie $z = 1$. Jest przy tym oczywiste, że jeśli ξ^* jest punktem równowagi, to jest nim także każdy wektor postaci $\alpha\xi^*$, gdzie α jest dowolne.

Definicja 9.3 Równanie fazowe nazywa się stabilnym, jeśli, dla każdego ξ_{-1} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

Ponieważ $\xi_n = \mathbf{A}^n \xi_{-1}$, a więc równanie fazowe jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = 0$. Jak wiadomo, patrz np. [8], ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, \dots, |\lambda_m| < 1,$$

gdzie λ_i są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} . Ponieważ, jak już wiemy, patrz § 8.6, bieguny transmitancji pokrywają się z wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , wynika stąd ważna własność.

Własność 9.6 *System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego równanie fazowe jest stabilne.*

9.3.4 Ograniczone wejście – ograniczone wyjście

Dowody podanych poniżej własności są podobne do tych, które dotyczą systemów ciągłych i dlatego są pominięte.

Własność 9.7 *Niech system będzie stabilny. Jeśli warunek początkowy jest zerowy, to*

$$\sup_n |y_n| \leq c \sup_n |u_n|$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_n| \leq c \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|,$$

gdzie $c = \sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$.

Własność 9.8 *Niech system będzie stabilny. Jeśli warunek początkowy jest zerowy, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 \leq d^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2,$$

gdzie $d = \sup_{\omega \in [0, \pi)} |K(e^{j\omega})|$.

Posługując się pojęciem normy, własności powyższe można zapisać jednym wzorem. Oznaczając bowiem poszczególne normy jako $\|x_n\|_1 = \sup_n |x_n|$, $\|x_n\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ oraz $\|x_n\|_3 = (\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2)^{1/2}$, zauważamy, że nierówności w dwóch ostatnich własnościach można przedstawić w następującej, jednolitej postaci:

$$\|y_n\|_i \leq \gamma_i \|u_n\|_i,$$

gdzie $\gamma_1 = \gamma_2 = c$ oraz $\gamma_3 = d$.

Ćwiczenie 9.5 Wyznaczyć c oraz d dla systemu o transmitancji $z/(z - \lambda)$. Przeprowadzić dyskusję na temat ich istnienia w zależności od λ .

9.4 Własności systemów niestabilnych

Poniższe własności są oczywiste.

Własność 9.9 W systemie na granicy stabilności

$$\sup_n |k_n| < \infty.$$

Własność 9.10 W systemie niestabilnym nie będącym na granicy stabilności

$$\max_{i \in \{0, \dots, n\}} |k_i| \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

Rozdział 10

Kryteria stabilności systemów dyskretnych

Aby stwierdzić, czy system dyskretny jest stabilny, należy rozstrzygnąć, czy wszystkie pierwiastki z_1, \dots, z_m jego wielomianu charakterystycznego

$$M(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (10.1)$$

leżą w kole jednostkowym, tzn., czy spełniają nierówności

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1. \quad (10.2)$$

Można to zrobić na dwa, zasadniczo różne sposoby.

W pierwszym dokonuje się odwzorowania płaszczyzny z na płaszczyznę innej zmiennej zespolonej, powiedzmy w . Odwzorowanie to przekształca okrąg jednostkowy w oś liczb urojonych, a jego wnętrze w lewą półpłaszczyznę. Badanie, czy pierwiastki równania charakterystycznego o zmiennej z leżą w kole jednostkowym, można dzięki temu sprowadzić do pytania, czy pierwiastki równania powstałego przez odpowiednią zamianę zmiennej z na w leżą w lewej półpłaszczyźnie. Wynikający stąd problem można rozwiązać stosując znane już kryteria, omówione podczas analizy systemów ciągłych.

Druga klasa metod polega na wykorzystaniu kryteriów opracowanych specjalnie dla systemów dyskretnych. Niektóre z nich w sposób oczywisty nawiązują do kryteriów Michajłowa i Nyquista, przedstawionych wcześniej przy analizie systemów ciągłych. Są ich dyskretnymi odpowiednikami.

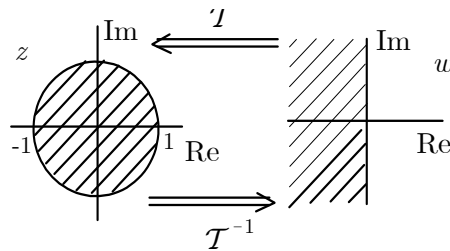
10.1 Przekształcenie półpłaszczyzny w koło

Jak już wiemy, aby stwierdzić, czy system jest stabilny, wystarczy zbadać, czy wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego $M(z) = 0$ spełniają warunek (9.2), tzn. czy leżą wewnątrz koła jednostkowego, czyli koła o promieniu 1 i środku w punkcie $z = 0$. Można w tym celu posłużyć się odwzorowaniem $z = \mathcal{T}(w)$, zdefiniowanym następująco:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}. \quad (10.3)$$

Jest to szczególny przypadek odwzorowania homograficznego (tzn. takiego, że $z = (aw + b)/(cw + d)$, gdzie $ad - bc \neq 0$). Przekształca ono całą płaszczyznę domkniętą (tzn. uzupełnioną o punkt $w = \infty$) w nią samą. Jak nietrudno sprawdzić, patrz także rys. 10.1, $z = \mathcal{T}(w)$ przekształca:

- oś $\text{Im } w$ w okrąg $|z| = 1$, z którego usunięto punkt $z = 1$,
- punkt $w = \infty$ w punkt $z = 1$,
- lewą półpłaszczyznę $\text{Re } w < 0$ we wnętrze koła jednostkowego, czyli zbiór punktów z , dla których $|z| < 1$,
- prawą półpłaszczyznę $\text{Re } w > 0$ w zewnątrz koła jednostkowego, czyli zbiór punktów z takich, że $|z| > 1$.



Rys. 10.1. Transformacje T i T^{-1}

Z kolei jego odwrotność $w = \mathcal{T}^{-1}(z)$, czyli $w = (z+1)/(z-1)$, przekształca:

- okrąg $|z| = 1$, z którego usunięto punkt $z = 1$, w oś $\text{Im } w$,
- punkt $z = 1$ w punkt $w = \infty$,
- wnętrze koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę,
- zewnątrz koła jednostkowego w prawą półpłaszczyznę.

Powyższe własności sugerują, że aby zweryfikować, czy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego

$$M(z) = 0 \quad (10.4)$$

spełniają nierówności (10.2), można sprawdzić, czy wszystkie pierwiastki równania

$$M\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = 0$$

leżą w lewej półpłaszczyźnie, który to problem można rozwiązać stosując kryterium Routha–Hurwitza, Hurwitza, czy Michajłowa.

Przykład 10.1 *Wielomian $M(z) = 6z^2 - z - 1 = (3z+1)(2z-1)$ ma pierwiastki $z_1 = 1/2$ oraz $z_2 = -1/3$. Dokonując podstawienia (10.3), otrzymujemy równanie $4w^2 + 14w + 6 = 0$ o rozwiązaniach $w_1 = -3, w_2 = -1/2$. Jest przy tym oczywiste, że $z_1 = (w_1 + 1)/(w_1 - 1)$ oraz $z_2 = (w_2 + 1)/(w_2 - 1)$. Stwierdzamy zatem, że pierwiastki z_1, z_2 leżą w kole jednostkowym, natomiast pierwiastki w_1, w_2 w lewej półpłaszczyźnie.*

Przykład 10.2 *Równanie $2z^2 + 3z - 2 = 0$ ma dwa pierwiastki $z_1 = 1/2$ oraz $z_2 = -2$. Podstawienie (10.3) doprowadza nas do równania $3w^2 + 8w - 3 = 0$ o rozwiązaniach $w_1 = -3, w_2 = 1/3$. Pierwiastek z_1 leży w kole jednostkowym, a odpowiadający mu pierwiastek w_1 w lewej półpłaszczyźnie. Drugi, czyli z_2 znajduje się poza kołem jednostkowym, a związany z nim w_2 w prawej półpłaszczyźnie.*

W postępowaniu takim ukryte jest jednak pewne niebezpieczeństwo, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 10.3 *Niech teraz $M(z) = 2z^2 - 3z + 1 = (z-1)(2z-1)$, co oznacza, że wielomian ten ma pierwiastek $z_1 = 1/2$ leżący w kole jednostkowym oraz drugi $z_2 = 1$. Podstawienie (10.3) doprowadza do równania $2w + 6 = 0$ o jedynym rozwiązaniu $w_1 = -3$. Leży ono w lewej półpłaszczyźnie, a odpowiadające mu z_1 w kole jednostkowym. Rozwiązanie $z_2 = 1$ nie ma natomiast swojego odpowiednika.*

Jak świadczy ostatni przykład, przedstawiony sposób postępowania może zawieść, gdy równanie (10.4) ma pierwiastek w punkcie $z = 1$. Aby bliżej przyjrzeć się problemowi, wróćmy do (10.4) i załóżmy, że $z_1 = 1$ oraz że

pozostałe pierwiastki są różne od 1. Ponieważ, $M(z) = a_m(z-z_1) \prod_{i=2}^m (z-z_i)$, a zatem (10.4) można więc zapisać jako

$$(z - z_1) \prod_{i=2}^m (z - z_i) = 0.$$

Podstawienie (10.3) doprowadza do równania

$$\left(\frac{w+1}{w-1} - z_1\right) \prod_{i=2}^m \left(\frac{w+1}{w-1} - z_i\right) = 0,$$

czyli

$$\frac{2}{w-1} \prod_{i=2}^m \left(\frac{(1-z_i)w+1+z_i}{w-1}\right) = 0.$$

Mnożąc następnie obydwie strony przez $(w-1)^m$, dostajemy ostatecznie równanie

$$2 \prod_{i=2}^m [(1-z_i)w+1+z_i] = 0 \quad (10.5)$$

o $m-1$ pierwiastkach, a mianowicie:

$$w_i = \frac{z_i+1}{z_i-1} = \mathcal{T}(z_i),$$

przy czym $i = 2, 3, \dots, m$. Ze względu na własności odwzorowań \mathcal{T} oraz \mathcal{T}^{-1} , $|z_i| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} w_i < 0$, $i = 2, \dots, m$. Pierwiastek z_1 nie ma jednak swojego odpowiednika wśród rozwiązań równania (10.5), a to dlatego, że punktowi $z = 1$ odpowiada $w = \infty$. Można powiedzieć, że przechodząc od równania (10.4) do (10.5) niejako zgubiliśmy pierwiastek leżący w punkcie $z = 1$, a on właśnie jest przyczyną tego, że system nie jest stabilny. Podobnie przedstawia się problem, gdy jest on wielokrotny. Wykazaliśmy więc następujące własności:

Własność 10.1 *Jeśli równanie (10.4) jest stopnia m , to równanie (10.5) ma stopień $m - k$, gdzie k jest krotnością pierwiastka $z = 1$ równania (10.4).*

Własność 10.2 *Niech równanie (10.4) nie ma żadnego rozwiązania w punkcie $z = 1$. Wówczas wszystkie jego rozwiązania leżą wewnątrz koła jednostkowego wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania równania (10.5) leżą w lewej półpłaszczyźnie.*

Nietrudno jednak zabezpieczyć się przed groźącym błędem. Zauważmy bowiem, że $M(1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 1$ jest pierwiastkiem równania (10.4). W rezultacie dochodzimy do ostatecznego wniosku:

Twierdzenie 10.1 *System o równaniu charakterystycznym (10.4) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

▷ $M(1) \neq 0$ oraz

▷ *wszystkie rozwiązania równania*

$$(w - 1)^m M\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) = 0$$

leżą w lewej półpłaszczyźnie.

Do sprawdzenia, czy spełniona jest druga część warunku podanego w powyższym twierdzeniu, można zastosować kryteria Routha–Hurwitza, Hurwitza lub Michajłowa, podane podczas analizy systemów ciągłych.

Kryterium Routha–Hurwitza

Do zbadania stabilności systemu wykorzystamy twierdzenie 10.1, a do sprawdzenia drugiej części jego warunku zastosujemy kryterium Routha–Hurwitza, tzn. twierdzenie 5.2. Zwracamy uwagę na to, że – podobnie jak oryginalne kryterium Routha–Hurwitza – także i takie postępowanie sprawdza, czy spełniony jest warunek wystarczający.

Przykład 10.4 *Dla $M(z) = (z + 2)(2z - 1) = 2z^2 + 3z - 2$ zauważamy, że $M(1) = 5 \neq 0$. Podstawienie (10.3) prowadzi od równania $2z^2 + 3z - 2 = 0$ do $3w^2 + 8w - 3 = 0$, dla którego*

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

oraz $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = -24$. Zatem $V(3, 8, -24/8) = 1$, skąd, na mocy kryterium Routha–Hurwitza, wynika, że jeden pierwiastek równania $3w^2 + 8w - 3 = 0$ leży w prawej półpłaszczyźnie, co jest równoważne z tym, że jeden pierwiastek równania $M(z) = 0$ leży na zewnątrz koła jednostkowego. Stwierdzamy zatem, że system jest niestabilny.

Przykład 10.5 *Dla $M(z) = 3z^2 - 2z + 3$ spostrzegamy, że $M(1) = 4 \neq 0$. Podstawienie (10.3) doprowadza do równania $w^2 + 2 = 0$. Kryterium Routha–Hurwitza nie wypowiada się na temat stabilności.*

Kryterium Hurwitza

Sposób wykorzystania kryterium Hurwitza, czyli twierdzenia 5.3, pokażemy na przykładach.

Przykład 10.6 Niech $M(z) = 24z^3 + 10z^2 - 3z - 1$. Jest oczywiste, że $M(1) = 30 \neq 0$. Podstawienie (10.3) prowadzi teraz do równania $15w^3 + 44w^2 + 31w + 6 = 0$. Aby sprawdzić, czy wszystkie jego rozwiązania leżą w lewej półpłaszczyźnie, tworzymy macierz Hurwitza

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 44 & 6 & 0 \\ 15 & 31 & 0 \\ 0 & 44 & 6 \end{bmatrix}$$

i następnie znajdujemy jej główne podwyznaczniki: $\Delta_1 = 44$, $\Delta_2 = 1274$ oraz $\Delta_3 = 7644$. System jest zatem stabilny.

Przykład 10.7 Niech teraz $M(z) = 6z^3 - 5z^2 - 2z + 1$. Ponieważ, $M(1) = 0$, więc system nie jest stabilny.

Przykład 10.8 Niech $M(z) = 6z^3 + 13z^2 + z - 2$. Po pierwsze, $M(1) = 18 \neq 0$. Po drugie, podstawiając (10.3) otrzymujemy równanie $18w^3 + 36w^2 - 2w - 4 = 0$. Macierzą Hurwitza jest

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 36 & -4 & 0 \\ 18 & -2 & 0 \\ 0 & 36 & -4 \end{bmatrix}.$$

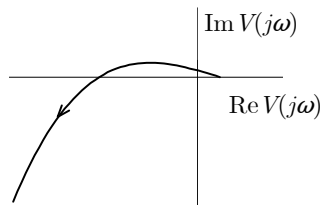
Ponieważ $\Delta_2 = 0$, a zatem system nie jest stabilny.

Jest oczywiste, że ponieważ kryterium Hurwitza określa warunek konieczny i wystarczający, a zatem także droga przedstawiona w przykładach sprawdza warunek konieczny i zarazem wystarczający.

Kryterium Michajłowa

Teraz także wykorzystamy twierdzenie 10.1, lecz do sprawdzenia drugiej części jego warunku zastosujemy kryterium Michajłowa, czyli twierdzenie 5.5. Nie trzeba dodawać, że otrzymujemy w ten sposób kryterium podające warunek konieczny i wystarczający.

Przykład 10.9 Dla $M(z) = 18z^3 - 9z^2 - 2z + 1$ wyliczamy $M(1) = 8 \neq 0$. Podstawienie (10.3) doprowadza do równania $V(w) = 0$, gdzie $V(w) = 8w^3 + 44w^2 + 68w + 24$. Wykres Michajłowa wielomianu $V(w)$, tzn. wykres $V(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$ pokazany jest na rys. 10.2. Ponieważ $\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} V(j\omega) = 3\pi/2$, więc system jest stabilny.



Rys. 10.2. Wykres Michajłowa, przykład 10.9

10.2 Kryterium Jury'ego

Aby przedstawić kryterium Jury'ego, wprowadzimy pojęcie macierzy wewnętrznej wobec macierzy kwadratowej. Niech \mathbf{A} będzie macierzą kwadratową. Jej kolejne macierze wewnętrzne otrzymuje się przez:

- skreślenie w macierzy \mathbf{A} pierwszego i ostatniego wiersza oraz pierwszej i ostatniej kolumny,
- skreślenie w macierzy \mathbf{A} dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wierszy oraz dwóch pierwszych i dwóch ostatnich kolumn,
- itd. aż do otrzymania macierzy stopnia 1 lub 2.

Dla przykładu macierz wewnętrzna macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

to $[a_{22}]$. Macierzą wewnętrzną dla

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

jest natomiast

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Z kolei macierzami wewnętrznymi wobec

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 8 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

są

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ oraz [2].}$$

Wyznaczniki macierzy wewnętrznych macierzy \mathbf{A} nazywamy jej wyznacznikami wewnętrznymi.

Dla wielomianu charakterystycznego (10.1) definiujemy następujące dwie macierze:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_3 & a_2 \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_3 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_m & a_{m-1} \\ & & & & a_m \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} & & & & a_0 \\ & & & a_0 & a_1 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-3} \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} \end{bmatrix}.$$

Podamy teraz kryterium Jury'ego, patrz [7].

Twierdzenie 10.2 (Jury) *Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:*

▷ $M(1) > 0$,

▷ $(-1)^m M(-1) > 0$,

▷ *wyznacznik oraz wszystkie podwyznaczniki wewnętrzne macierzy $\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{A}}$ są dodatnie.*

Przykład 10.10 Dla $M(z) = 6z^2 + 5z + 1$ stwierdzamy, że $M(1) = 12 > 0$, $(-1)^2 M(-1) = 2 > 0$. Ponadto $\hat{\mathbf{A}} = 6$ i $\check{\mathbf{A}} = 1$, skąd wynika, że $\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}} = 7$ oraz $\hat{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{A}} = 5$. System jest więc stabilny.

Przykład 10.11 Niech teraz $M(z) = z^2 + a_1 z + a_0$. Z nierówności $M(1) > 0$ oraz $M(-1) > 0$ wynika $1 + a_1 + a_0 > 0$ oraz $1 - a_1 + a_0 > 0$. Ponieważ $\hat{\mathbf{A}} = [1]$ oraz $\check{\mathbf{A}} = [a_0]$, zatem z nierówności $\det(\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}}) > 0$ i $\det(\hat{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{A}}) > 0$ wynika $1 - a_0 > 0$ oraz $1 + a_0 > 0$. Łatwo sprawdzić, że ostatnią z wyznaczonych nierówności można pominąć.

Przykład 10.12 Niech $M(z) = 6z^3 + z^2 - 3z + 2$. Teraz $M(1) = 6 > 0$, $(-1)^3 M(-1) = 6 > 0$. Ponieważ

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

więc

$$\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Zauważając, że $\det(\hat{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{A}}) = 12 > 0$ i $\det(\hat{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{A}}) = 52 > 0$, wnioskujemy, że system jest stabilny.

10.3 Kryterium Michajłowa

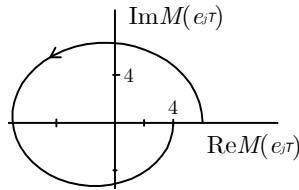
W dalszym ciągu badamy stabilność systemu o równaniu charakterystycznym (10.1), w którym $a_m > 0$. Zajmiemy się teraz funkcją $M(e^{j\omega})$ dla $\omega \in [0, \pi]$. Ponieważ $M(z)$ i $e^{j\omega}$ są funkcjami ciągłymi swoich argumentów, zatem, na domkniętym odcinku $[0, \pi]$, także $M(e^{j\omega})$ jest funkcją ciągłą argumentu ω .

Definicja 10.1 Wykres funkcji $M(e^{j\omega})$ dla $\omega \in [0, \pi]$ nazywa się (dyskretnym) wykresem Michajłowa.

Przykład takiego wykresu dla wielomianu $M(z) = 6z^2 + z - 1$ pokazano na rys. 10.3.

Zajmiemy się teraz funkcją $\arg M(e^{j\omega})$. Rzeczywiste pierwiastki równania $M(z) = 0$ oznaczymy w tym celu jako ξ_1, \dots, ξ_p , a pary zespolone jako $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, co oznacza, że $p + 2q = m$. Zatem

$$M(z) = a_m \prod_{i=1}^p (z - \xi_i) \prod_{i=1}^q (z - \eta_i)(z - \bar{\eta}_i).$$



Rys. 10.3. Przykład dyskretnego wykresu Michajłowa

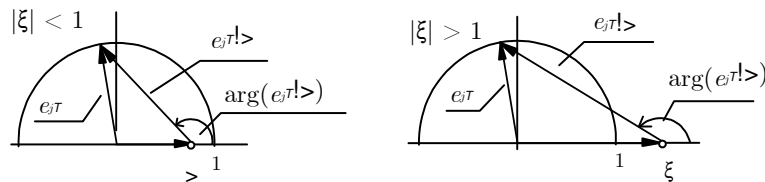
Ponieważ $a_m > 0$, wynika stąd

$$\arg M(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^p \arg(e^{j\omega} - \xi_i) + \sum_{i=1}^q \arg(e^{j\omega} - \eta_i)(e^{j\omega} - \bar{\eta}_i). \quad (10.6)$$

Dla $M(e^{j\omega})$ będącego funkcją ciągłą na otwartym odcinku $\omega \in (0, \pi)$, definiujemy

$$\Delta \arg M(e^{j\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\omega \rightarrow \pi^-} \arg M(e^{j\omega}) - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg M(e^{j\omega}).$$

Funkcjonał ten nazywa się przyrostem argumentu funkcji $M(e^{j\omega})$ na otwartym odcinku $(0, \pi)$. Rozpatrzmy teraz poszczególne składniki sum w wyrażeniu (10.6).

Rys. 10.4. $\arg(e^{j\omega} - \xi)$, ξ rzeczywiste poza okręgiem jednostkowym

Pierwiastek rzeczywisty ξ poza okręgiem jednostkowym

Jeśli pierwiastek rzeczywisty ξ leży wewnątrz koła jednostkowego, to $|\xi| < 1$, jeśli na zewnątrz, to $|\xi| > 1$. Funkcja $\arg(e^{j\omega} - \xi)$ jest ciągła na odcinku domkniętym $[0, \pi]$. Ponadto, patrz rys. 10.4,

$$\Delta \arg(e^{j\omega} - \xi) = \begin{cases} \pi, & \text{dla } |\xi| < 1 \\ 0, & \text{dla } |\xi| > 1. \end{cases}$$

Dla $\omega \in [0, \pi]$ wykres funkcji $e^{j\omega} - \xi$ nie przechodzi przez punkt $z = 0$.

Pierwiastek rzeczywisty ξ na okręgu jednostkowym

Teraz $\xi = 1$ lub $\xi = -1$. Funkcja $\arg(e^{j\omega} - \xi)$ jest ciągła na odcinku $\omega \in (0, \pi)$ oraz

$$\Delta_{0 < \omega < \pi} \arg(e^{j\omega} - \xi) = \frac{\pi}{2}.$$

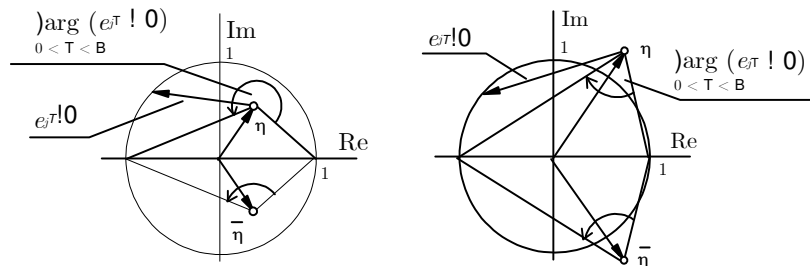
Dla $\omega \in [0, \pi]$ wykres funkcji $e^{j\omega} - \xi$ przechodzi przez punkt $z = 0$.

Para pierwiastków zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$ poza okręgiem jednostkowym

Teraz z kolei $|\eta| < 1$ lub $|\eta| > 1$, przy czym $\text{Im} \eta \neq 0$. Funkcja $\arg(e^{j\omega} - \eta)$ ($e^{j\omega} - \bar{\eta}$) jest ciągła na odcinku domkniętym $[0, \pi]$ oraz, patrz rys. 10.5,

$$\Delta_{0 < \omega < \pi} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) = \begin{cases} 2\pi, & \text{dla } |\eta| < 1 \\ 0, & \text{dla } |\eta| > 1. \end{cases}$$

Dla $\omega \in [0, \pi]$ wykres funkcji $(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$ nie przechodzi przez punkt $z = 0$.



Rys. 10.5. $\Delta \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$, η zespolone poza okręgiem jednostkowym

Para pierwiastków zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$ na okręgu jednostkowym

W ostatniej sytuacji $|\eta| = 1$, przy czym $\text{Im} \eta \neq 0$. Oznaczając $\eta = e^{j\rho}$, zauważamy, że funkcja $\arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) = \arg(e^{j\omega} - e^{j\rho})(e^{j\omega} - e^{-j\rho})$ jest nieciągła w punkcie $\omega = \rho$. Dla $\omega = \rho$ wykres funkcji $(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$ przechodzi przez punkt $z = 0$.

Wyniki naszych rozważań dotyczące przyrostu argumentu funkcji $M(e^{j\omega})$ przy pulsacji ω zmieniającej się w przedziale $(0, \pi)$ podamy teraz w zwartej formie w postaci następującego lematu:

Lemat 10.1 Niech $a_m > 0$. Dyskretny wykres Michajłowa przechodzi przez punkt $z = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M(z)$ ma pierwiastek na okręgu jednostkowym. Jeśli wielomian $M(z)$ nie ma takiego pierwiastka, to

$$\Delta_{0 < \omega < \pi} \arg M(e^{j\omega}) = (m_- - m_+) \pi,$$

gdzie m_- i m_+ są liczbami pierwiastków wielomianu $M(z)$ położonych odpowiednio wewnątrz i na zewnątrz okręgu jednostkowego.

Naturalnym, bezpośrednim wnioskiem z lematu jest poniższe twierdzenie, nazywane kryterium Michajłowa stabilności systemów dyskretnych. Zalicza się ono do klasy kryteriów częstotliwościowych.

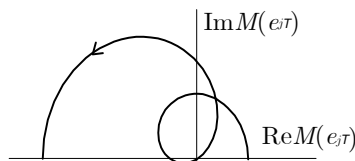
Twierdzenie 10.3 (Michajłow) Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{0 < \omega < \pi} \arg M(e^{j\omega}) = m\pi$$

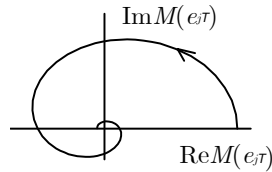
i wykres Michajłowa nie przechodzi przez punkt $z = 0$.

Można powiedzieć, że powyższe twierdzenie jest dyskretnym odpowiednikiem kryterium Michajłowa znanego już nam w wersji ciągłej. Jest oczywiste, że – podobnie jak tamto – podaje ono warunek, który jest konieczny i wystarczający zarazem.

Przykład 10.13 Dla wielomianu charakterystycznego $M(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$ sporządzmy wykres Michajłowa i zauważamy, patrz rys. 10.6, że krzywa $M(j\omega)$ przechodzi przez punkt $z = 0$. Odwołując się do kryterium Michajłowa, wnioskujemy stąd, że system jest niestabilny.



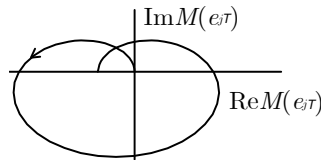
Rys. 10.6. Wykres Michajłowa, przykład 10.13



Rys. 10.7. Wykres Michajłowa, przykład 10.14

Przykład 10.14 Dla $M(z) = 12z^3 + 16z^2 + 7z + 1$ wykres Michajłowa, patrz rys. 10.7, nie przechodzi przez punkt $z = 0$ i ponadto $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}) = 3\pi$. System jest stabilny.

Przykład 10.15 Dla $M(z) = 4z^3 - 3z - 1$ wykres Michajłowa przedstawiony na rys. 10.8 przechodzi przez punkt $z = 0$. System nie jest więc stabilny.



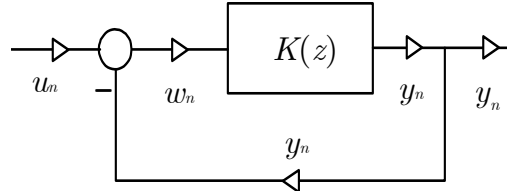
Rys. 10.8. Wykres Michajłowa, przykład 10.15

10.4 Kryterium Nyquista

Przejdziemy teraz do dyskretnej wersji kryterium Nyquista. Służy ono do badania stabilności systemów ze sprzężeniem zwrotnym, tzn. systemów o strukturze pokazanej na rys. 10.9.

Ponieważ argumentacja jest bardzo podobna do tej, którą przeprowadziliśmy w części dotyczącej systemów z czasem ciągłym, ograniczymy zatem się jedynie do ostatecznych rezultatów. Transmitancją systemu otwartego jest

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$



Rys. 10.9. System z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

natomiast zamkniętego

$$K_Z(z) = \frac{K(z)}{1 + K(z)} = \frac{L(z)}{L(z) + M(z)}.$$

Zatem

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = \Delta \arg_{0 < \omega < \pi} [L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})] - \Delta \arg_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}).$$

Z kryterium Michajłowa wynika, że badany system zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} [L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})] = \text{st}[L + M]\pi.$$

Argumentując jak w przypadku systemów ciągłych, nietrudno teraz wykazać prawdziwość podanych poniżej rezultatów. Każdy z nich dotyczy innego położenia biegunów transmitancji systemu otwartego. W pierwszej sytuacji system otwarty jest stabilny. W drugiej jego transmitancja ma biegun w punkcie $z = 1$. W kolejnej jest on niestabilny. Na końcu rozpatrujemy przypadek, w którym jego transmitancja ma biegun na okręgu jednostkowym.

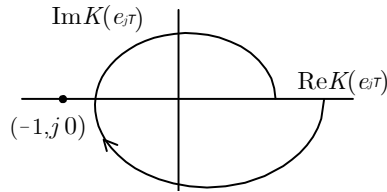
System otwarty stabilny

Ponieważ, dla $a_m > 0$, $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}) = m\pi$, prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.4 (Nyquist) Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech system otwarty będzie stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = 0$$

i wykres $K(e^{j\omega})$, gdzie $\omega \in [0, \pi]$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.



Rys. 10.10. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 10.16

Przykład 10.16 Niech $K(z) = 5/(2z - 1)(3z + 1)$. Ponieważ charakterystyka amplitudowo-fazowa systemu otwartego ma kształt jak na rys. 10.10, system zamknięty więc jest stabilny.

System otwarty ma bieguny w punkcie $z = 1$

Twierdzenie 10.5 (Nyquist) Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma m_1 -krotny biegun w punkcie $z = 1$, a wszystkie pozostałe wewnątrz koła jednostkowego. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = m_1 \frac{\pi}{2}$$

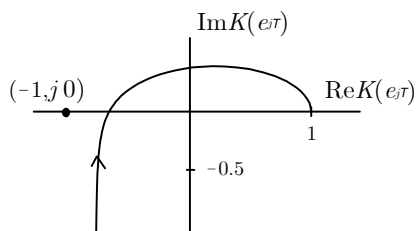
i wykres $K(e^{j\omega})$, gdzie $\omega \in [0, \pi]$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Aby wykazać prawdziwość tej wersji kryterium, wystarczy zauważyć, że $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}) = (m - m_1/2)\pi$. ■

Przykład 10.17 Dla systemu otwartego o transmitancji $K(z) = 2/(z - 1)(2z + 1)$ charakterystykę amplitudowo-fazową pokazuje rys. 10.11. System zamknięty jest zatem stabilny.

System otwarty niestabilny

Omówimy teraz kolejną sytuację. System otwarty jest teraz niestabilny. Zakładamy przy tym, że jego transmitancja ma bieguny wewnątrz i na zewnątrz okręgu jednostkowego. Żaden biegun nie leży jednak na samym okręgu. O stabilności systemu zamkniętego wypowiada się poniższe kryterium.



Rys. 10.11. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 10.17

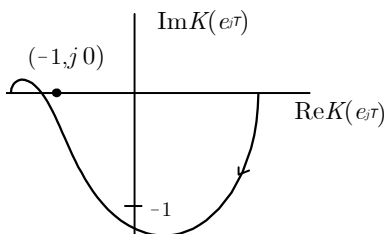
Twierdzenie 10.6 (Nyquist) Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech ponadto transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma wszystkie bieguny w kole jednostkowym z wyjątkiem m_+ biegunów na zewnątrz. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg [1 + K(e^{j\omega})]_{0 < \omega < \pi} = m_+ \pi$$

i wykres $K(e^{j\omega})$, gdzie $\omega \in [0, \pi]$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Dowód. Dla dowodu wystarczy wziąć pod uwagę to, że $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi} M(e^{j\omega}) = (m - m_+) \pi$. ■

Przykład 10.18 Niech teraz $K(z) = 4/(z + 2)(2z - 1)$ będzie transmitancją systemu otwartego. Z rys. 10.12 i przedstawionej powyżej wersji kryterium Nyquista wynika, że system zamknięty nie jest stabilny.



Rys. 10.12. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 10.18

System otwarty ma bieguny zespolone na okręgu $|z| = 1$

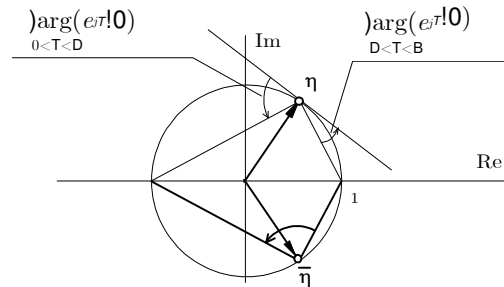
Teraz zakładamy, że transmitancja systemu otwartego ma parę biegunów zespolonych $(\eta, \bar{\eta})$, przy czym $\text{Im } \eta \neq 0$, na okręgu jednostkowym. Niech $\rho = \arg \eta$, $0 < \rho < \pi$. Oznaczając $\eta = e^{j\rho}$ zauważamy, że funkcja $\arg(e^{j\omega} - \eta)$ ($e^{j\omega} - \bar{\eta}$), czyli inaczej $\arg(e^{j\omega} - e^{j\rho})(e^{j\omega} - e^{-j\rho})$, jest ciągła na dwóch otwartych odcinkach $(0, \rho)$ oraz (ρ, π) . Zatem, korzystając z rysunku 10.13, łatwo stwierdzamy, że

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) + \Delta_{\rho < \omega < \pi} \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta}) = \pi.$$

Wynika stąd, że

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg M(e^{j\omega}) + \Delta_{\rho < \omega < \pi} \arg M(e^{j\omega}) = (m - 1)\pi,$$

dzięki czemu możemy podać odpowiednią wersję kryterium Nyquista dostosowaną do własności systemu otwartego.



Rys. 10.13. $\Delta \arg(e^{j\omega} - \eta)(e^{j\omega} - \bar{\eta})$, $(\eta, \bar{\eta})$ na okręgu jednostkowym

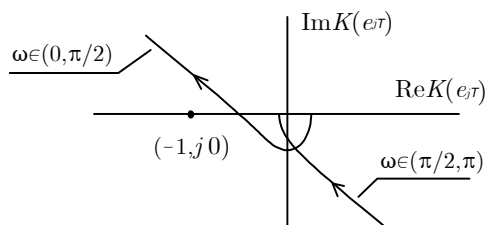
Twierdzenie 10.7 (Nyquist) Niech $l < m$ i niech $a_m > 0$. Niech ponadto transmitancja $K(z)$ systemu otwartego ma wszystkie bieguny w kole jednostkowym z wyjątkiem jednokrotnej pary na okręgu jednostkowym. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_{0 < \omega < \rho} \arg [1 + K(e^{j\omega})] + \Delta_{\rho < \omega < \pi} \arg [1 + K(e^{j\omega})] = \pi$$

i wykres $K(e^{j\omega})$, gdzie $\omega \in [0, \pi]$, nie przechodzi przez punkt $(-1, j0)$.

Podany rezultat zilustrujemy przykładem, w którym transmitancja systemu otwartego ma parę biegunów urojonych $(-j, j)$.

Przykład 10.19 Niech teraz $K(z) = 1/2(z^2 + 1)(2z - 1)$. Transmitancja ma parę biegunów urojonych $(j, -j)$. Wykres funkcji $K(e^{j\omega})$ składa się z dwóch gałęzi, patrz rys. 10.14. Odpowiadają one zmianom ω w przedziałach $(0, \pi/2)$ oraz $(\pi/2, \pi)$. Zatem $\Delta \arg_{0 < \omega < \pi/2} [1 + K(e^{j\omega})] + \Delta \arg_{\pi/2 < \omega < \pi} [1 + K(e^{j\omega})] = \pi$. Zgodnie z ostatnią wersją kryterium Nyquista, system zamknięty jest więc stabilny.



Rys. 10.14. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego, przykład 10.19

Rozdział 11

Dyskretna regulacja automatyczna

11.1 System automatycznej regulacji

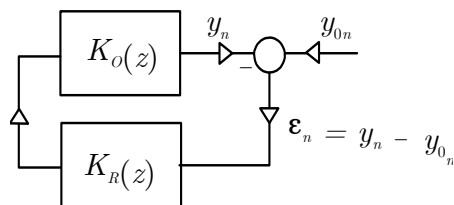
Dyskretny system automatycznej regulacji pokazany jest na rys. 11.1. Transmitancja systemu zamkniętego, tzn. systemu o wejściu y_{0n} i wyjściu y_n jest równa

$$K_Z(z) = \frac{K(z)}{1 + K(z)},$$

gdzie

$$K(z) = K_O(z)K_R(z)$$

jest transmitancją systemu otwartego, a $K_O(z)$ oraz $K_R(z)$ są odpowiednio transmitancjami obiektu i regulatora. Sygnał ε_n nazywa się uchybem.



Rys. 11.1. Dyskretny system automatycznej regulacji

Regulator powinien zapewnić, że sygnał wyjściowy obiektu y_n jest bliski sygnałowi wartości zadanej y_{0n} . Oznacza to, że uchyb ε_n powinien być możliwie mały.

Pamiętając, że

$$K(z) = \frac{L(z)}{M(z)},$$

gdzie $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami, otrzymujemy

$$K_Z(z) = \frac{L(z)}{L(z) + M(z)},$$

skąd wynika, że

$$M_Z(z) = L(z) + M(z)$$

jest wielomianem charakterystycznym systemu zamkniętego. Dla wygody warto oznaczyć przez $L_Z(z)$ licznik transmitancji układu zamkniętego i zapamiętać, że

$$K_Z(z) = \frac{L_Z(z)}{M_Z(z)}.$$

Ponadto

$$K_E(z) = \frac{1}{1 + K(z)} = \frac{M(z)}{L(z) + M(z)}$$

jest transmitancją uchybową.

Podstawową własnością, jaką system regulacji powinien mieć jest stabilność, do badania której można stosować dowolne z poznanych kryteriów.

W analizie, którą teraz przeprowadzimy obiekt ma transmitancję

$$K_O(s) = \frac{L_O(s)}{M_O(s)},$$

przy czym $\text{st}[M_O(z)] - \text{st}[L_O(z)] = p$. Przez $\text{st}[Q(z)]$ oznaczmy stopień wielomianu $Q(s)$. Zakładamy ponadto, że transmitancja ta nie ma bieguna w punkcie $z = 1$.

11.2 Regulacja statyczna, czyli P

O regulacji P mówimy, gdy regulator ma transmitancję $K_R(z) = k_1$, czyli gdy jest proporcjonalny, tzn. typu P. Zakładamy, że system zamknięty jest stabilny i ponadto $y_{0n} = 1_n$, czyli

$$Y_0(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Zatem

$$E(z) = \frac{1}{1 + k_1 K_O(z)} \frac{z}{z-1}.$$

Ponieważ system jest stabilny, z własności 9.2, s. 155, wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} E(z) = \frac{1}{1 + k_1 K_O(1)}.$$

Wykazaliśmy więc następującą własność:

Własność 11.1 *Niech $y_{0n} = 1_n$. W stabilnym systemie automatycznej regulacji statycznej*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \frac{1}{1 + k_1 K_O(1)} \neq 0.$$

Z uwagi na przyjęty obiekt, transmitancją systemu zamkniętego jest

$$K_Z(z) = \frac{k_1 L_O(z)}{k_1 L_O(z) + M_O(z)}.$$

Poza szczególnymi przypadkami, $\text{st}[M_Z(z)] - \text{st}[L_Z(z)] = p$. Na ogół bowiem różnica między stopniami wielomianów $L_O(z)$ i $M_O(z)$ oraz $L_Z(z)$ i $M_Z(z)$ jest taka sama, tzn. równa p . Z własności B.2, s. 242, wynika zatem, że przy pobudzeniu systemu skokiem jednostkowym i zerowym warunkiem początkowym,

$$y_0 = \dots = y_{p-1} = 0 \text{ i dopiero } y_p \neq 0. \quad (11.1)$$

Miarą szybkości reakcji systemu regulacji na pobudzenie $y_{0,n} = 1_n$ jest dla nas liczba $p - 1$, tzn. opóźnienie, z jakim system na nie reaguje.

11.3 Regulacja astatyczna

11.3.1 Regulacja I

Podobnie jak przy regulacji statycznej zakładamy, że $y_{0n} = 1_n$. Niech teraz

$$K_R(z) = k_2 \frac{1}{z - 1}$$

będzie transmitancją regulatora. Zauważmy, że jego odpowiedź impulsowa jest równa 0 dla $n = 1$ oraz k_2 dla $n = 2, 3, \dots$. Przy pobudzeniu sygnałem ε_n , wyjście w chwili n jest więc równe $k_2 \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i$. Ma on zatem własności sumacyjne i w związku z tym jest dyskretnym odpowiednikiem całkującego regulatora I.

Jeśli system zamknięty jest stabilny, to z twierdzenia granicznego B.4, s.241, wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + k_2 \frac{1}{z-1} K_O(z)} = 0.$$

Prawdziwa jest więc następująca własność:

Własność 11.2 Niech $y_{0n} = 1_n$. W stabilnym systemie automatycznej regulacji astatycznej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Przy założonym regulatorze i obiekcie

$$K_Z(z) = \frac{k_2 L_O(z)}{k_1 L_O(z) + (z-1)M_O(z)},$$

skąd wynika, że $\text{st}[M_Z(z)] - \text{st}[L_Z(z)] = p+1$. Zatem, przy pobudzeniu systemu skokiem jednostkowym i przy zerowym warunku początkowym,

$$y_0 = \dots = y_p = 0 \text{ i dopiero } y_{p+1} \neq 0.$$

Reakcja układu przy regulatorze I jest zatem wolniejsza niż przy regulacji P.

11.3.2 Regulacja PI

Nietrudno sprawdzić, że regulator o transmitancji

$$K_R(z) = k_1 + k_2 \frac{1}{z-1},$$

czyli typu PI, zapewnia korzystne cechy obserwowane z osobna w regulacji statycznej i astatycznej. Uchyb w stanie ustalonym jest bowiem zerowy, a szybkość reakcji jak w (11.1), bowiem

$$K_Z(z) = \frac{(k_1 z - k_1 + k_2) L_O(z)}{(k_1 z - k_1 + k_2) L_O(z) + (z-1) M_O(z)}.$$

Własności regulacji P, I oraz PI, przy zerowym warunku początkowym, zestawiono w tabelach 11.1 oraz 11.2. Przypominamy, że transmitancją obiektu jest $K_O(z) = L_O(z)/M_O(z)$ oraz $p = \text{st}[M_O(z)] - \text{st}[L_O(z)]$.

Wynika z nich w sposób oczywisty, że pod względem badanych własności najlepsza jest regulacja PI.

Tabela 11.1. Własności uchybu

Regulacja	ε_0	$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n$
P	1	$\frac{1}{1 + k_1 K_O(1)} \neq 0$
I	1	0
PI	1	0

Tabela 11.2. Własności wyjścia obiektu

Regulacja	y_0	\dots	y_{p-1}	y_p	y_{p+1}
P	0	\dots	0	$\neq 0$	
I	0	\dots	0	0	$\neq 0$
PI	0	\dots	0	$\neq 0$	

11.4 Obiekt ciągle sterowany dyskretnie

Instalując w ciągłym systemie automatycznej regulacji urządzenie nazywane impulsatorem, zamienia się go niejako w system dyskretny. Innym urządzeniem stosowanym w takich systemach jest ekstrapolator, który zamienia ciąg impulsów Diraca w funkcję schodkową.

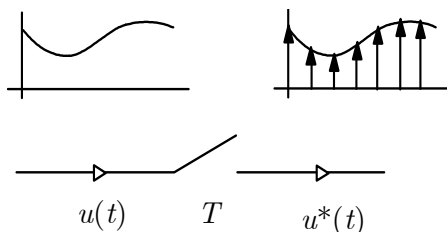
11.4.1 Impulsator w systemie ciągłym

Impulsator

Wejściem impulsatora, patrz rys. 11.2, jest sygnał $u(t)$, natomiast wyjściem

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT). \quad (11.2)$$

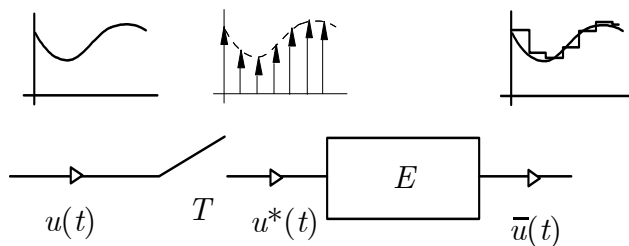
Zamienia więc on funkcję czasu w ciąg impulsów Diraca, modulowanych przez jej wartości w chwilach $0, T, 2T, 3T, \dots$. Liczba T nazywa się okresem impulsowania.



Rys. 11.2. Impulsator

Impulsator z ekstrapolatorem

Impulsator może współpracować z ekstrapolatorem oznaczonym na rys. 11.3 jako E .



Rys. 11.3. Impulsator z ekstrapolatorem

Jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca jak w (11.2). Wyjściem $\bar{u}(t)$ jest natomiast funkcja stała pomiędzy chwilami, w których działa impulsator, tzn. stała na odcinkach $[0, T), [T, 2T), \dots$. Na odcinku $[0, T)$ przyjmuje ona wartość $u(0)$, na $[T, 2T)$ wartość $u(T)$, na kolejnym $[2T, 3T)$ wartość $u(2T)$ itd. Ogólnie zatem

$$\bar{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T).$$

Zauważmy, że

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) [1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)], \quad (11.3)$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned}\bar{U}(s) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \left[e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT} \right] \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT}.\end{aligned}$$

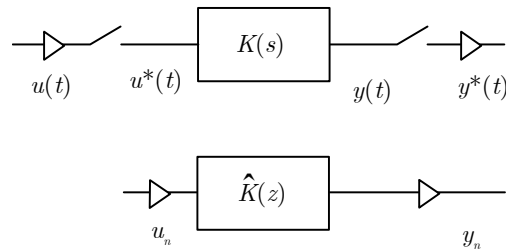
Zatem, z uwagi na to, że $U^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nsT}$, otrzymujemy ostatecznie

$$\bar{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} U^*(s). \quad (11.4)$$

11.4.2 Obiekt ciągły sterowany przez impulsator

Ciągły obiekt regulacji może współpracować z dwoma synchronicznie działającymi impulsatorami o okresie T , z których jeden znajduje się na wejściu tego obiektu, a drugi na wyjściu, rys 11.4. Sygnały $u^*(t)$ i $y^*(t)$ są ciągami impulsów Diraca, przy czym $u^*(t)$ dane jest wzorem (11.2), natomiast

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) \delta(t - nT).$$



Rys. 11.4. Obiekt ciągły sterowany przez impulsator

Z sygnałem $u^*(t)$ można w sposób wzajemnie jednoznaczny skojarzyć ciąg liczbowy $u(0), u(T), u(2T), \dots$, a z sygnałem $y^*(t)$ ciąg $y(0), y(T), y(2T), \dots$. Oznaczając $u_n = u(nT)$ oraz $y_n = y(nT)$, można powiedzieć, że ciąg wejściowy $\{u_n; n = 0, 1, \dots\}$ jest przez system dynamiczny przekształcany w ciąg $\{y_n; n = 0, 1, \dots\}$. System, który to robi, jest oczywiście dyskretny.

Znajdziemy teraz jego transmitancję. Zauważmy, że, przy zerowym warunku początkowym w obiekcie (tzn. systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$), mamy $Y(s) = K(s)U^*(s)$, skąd, na podstawie reguły o splocie, s. 198, wynika, że $y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u^*(\tau)d\tau$. Zatem

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{i=0}^n u(iT) \int_0^{nT} k(nT-\tau)\delta(\tau-iT)d\tau \\ &= \sum_{i=0}^n k((n-i)T)u(iT). \end{aligned}$$

Oznaczając $k_n = k(nT)$ możemy więc napisać, że

$$y_n = \sum_{i=0}^n k_{n-i}u_i.$$

Zatem $\hat{K}(z)$, czyli transmitancja systemu dyskretnego o wejściu u_n i wyjściu y_n , patrz rys. 11.4, jest równa

$$\hat{K}(z) = \mathcal{Z}\{k_n\}.$$

Odpowiedzią impulsową systemu jest oczywiście k_n .

Schemat postępowania przy znajdowaniu transmitancji dyskretniej pokazany jest poniżej:

$$K(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k(t) \Rightarrow k(nT) = k_n \Rightarrow \mathcal{Z}\{k_n\} = \hat{K}(z). \quad (11.5)$$

Przykład 11.1 Niech $K(s) = 1/(s + \alpha)$. Ponieważ $k(t) = e^{-\alpha t}$, a zatem $k_n = e^{-n\alpha T}$. Korzystając z (B.5), s. 235, otrzymujemy $\hat{K}(z) = z/(z - e^{-\alpha T})$.

Przykład 11.2 Dla $K(s) = 1/s$ znajdujemy $k(t) = 1$. Wynika stąd, że $k_n = 1$. Zatem $\hat{K}(z) = z/(z - 1)$.

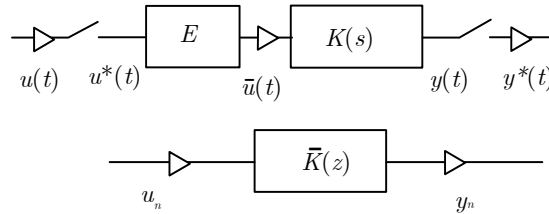
Przykład 11.3 Weźmy pod uwagę system ciągły o równaniu $y(t) = u(t - T)$ (czyli równaniu różniczkowym zerowego rzędu z opóźnieniem). Jego odpowiedzią impulsową jest $k(t) = \delta(t - T)$, a transmitancją $K(s) = e^{-sT}$ (jako transmitancję rozumiemy oczywiście iloraz $Y(s)/U(s)$). Zauważmy, że k_n ma teraz postać $\{0, 1, 0, 0, \dots\}$, skąd wynika, że $\hat{K}(z) = z^{-1}$. System dyskretny o tej transmitancji należy do klasy systemów z opóźnieniem; patrz § 8.2.2, s. 133. Zauważmy, że punkt osobliwy transmitancji $K(s)$, czyli $s = -\infty$, odpowiada punktowi osobliwemu (czyli biegunowi) $z = 0$ transmitancji $\hat{K}(z)$.

Ćwiczenie 11.1 Korzystając z ostatniego przykładu, wyznaczyć $\hat{K}(z)$, jeśli system opisywany jest równaniem $y'(t) + y(t) = u(t - T)$, czyli równaniem różniczkowym pierwszego rzędu z opóźnieniem). Następnie wyznaczyć tę transmitancję dla systemu o równaniu $y'(t) + y(t) = u(t - T/2)$.

Ćwiczenie 11.2 Niech $K(s) = 1/(s^2 + 1)$. Sprawdzić, że $\hat{K}(z) = z/(z + 1)$ dla $T = \pi/2$ oraz $\hat{K}(z) = 0$ dla $T = \pi$.

11.4.3 Obiekt ciągły, impulsator i ekstrapolator

Impulsatorowi znajdującemu się na wejściu obiektu ciągłego o transmitancji $K(z)$ może towarzyszyć ekstrapolator, co pokazano na rys. 11.5. Sygnały $u^*(t)$ i $y^*(t)$ są ciągami impulsów Diraca, z którymi można w sposób jednoznaczny skojarzyć ciągi liczbowe $u(0), u(T), u(2T), \dots$ oraz $y(0), y(T), y(2T), \dots$. Oznaczając $u_n = u(nT)$ i $y_n = y(nT)$ możemy zatem stwierdzić, że ciąg liczbowy $\{u_n; n = 0, 1, \dots\}$ jest przez system dynamiczny przetwarzany na ciąg $\{y_n; n = 0, 1, \dots\}$, i że system, który wykonuje tę operację, jest natury dyskretnej.



Rys. 11.5. Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem

W celu znalezienia jego opisu zakładamy, że w systemie ciągłym o transmitancji $K(s)$ warunek początkowy jest zerowy. Zauważmy, że z (11.4) wynika

$$Y(s) = K(s)\bar{U}(s) = H(s)U^*(s), \quad (11.6)$$

gdzie

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} K(s).$$

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\{H(s)\} &= \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} \\ &= \lambda(t) - \lambda(t - T), \end{aligned}$$

gdzie $\lambda(t)$ jest odpowiedzią skokową systemu o transmitancji $K(s)$. Stosując zatem wobec (11.6) regułę o splocie, s. 198, otrzymujemy $y(t) = \xi(t) + \xi(t-T)$, gdzie $\xi(t) = \int_0^t \lambda(t-\tau) u^*(\tau) d\tau$. Uwzględnienie (11.2) prowadzi do wniosku, że $\xi(nT) = \sum_{i=0}^n \lambda((n-i)T) u(iT)$, czyli $\xi_n = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} u_i$. W końcu

$$y_n = \sum_{i=0}^n (\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}) u_i.$$

System dyskretny ma zatem transmitancję

$$\bar{K}(z) = \mathcal{Z}\{\lambda_n - \lambda_{n-1}\} = \mathcal{Z}\{\lambda_n\} - z^{-1} \mathcal{Z}\{\lambda_n\},$$

czyli

$$\bar{K}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{\lambda_n\}.$$

Możemy więc podać następujący schemat postępowania, który prowadzi do transmitancji dyskretniej:

$$s^{-1} K(s) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \lambda(t) \Rightarrow \lambda(nT) = \lambda_n \Rightarrow \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\{\lambda_n\} = \bar{K}(z). \quad (11.7)$$

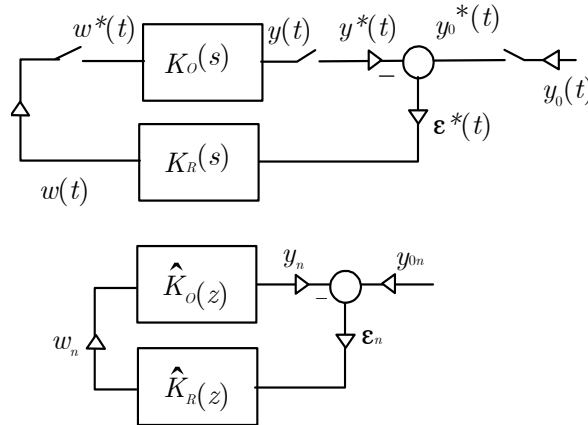
Przykład 11.4 Niech $K(s) = 1/(s+1)$. Ponieważ $\lambda(t) = 1 - e^{-t}$, więc $\lambda_n = 1 - e^{-nT}$. Korzystając z (B.5), s. 235, otrzymujemy zatem następującą transmitancję systemu dyskretnego: $\bar{K}(z) = (1 - e^{-T})z / (z-1)(z - e^{-T})$.

Przykład 11.5 Dla $K(s) = 1/s$ odpowiedzią skokową jest $\lambda(t) = t$. Zatem $\lambda_n = nT$ i w rezultacie $\bar{K}(z) = Tz / (z-1)^2$.

11.4.4 Układy automatycznej regulacji

Wykorzystując impulsator i ekstrapolator można budować systemy automatycznej regulacji, w których obiekty ciągle sterowane są w sposób dyskretny. Przykład takiego systemu z impulsatorami pokazano na rys. 11.6. Z uwagi na to, że sygnały $y_0^*(t)$, $\varepsilon^*(t)$, $w^*(t)$ oraz $y^*(t)$ można utożsamić z ciągami liczbowymi y_{0n} , ε_n , w_n oraz y_n , sporządzamy schemat systemu dyskretnego pokazany na tym samym rysunku.

Należy zaznaczyć, że o ile system ciągły z impulsatorami istnieje realnie, o tyle system dyskretny jest jedynie schematem, czyli pewną abstrakcją. Po wyznaczeniu, zgodnie z procedurą (11.5) transmitancji $\hat{K}_O(z)$ oraz $\hat{K}_R(z)$,



Rys. 11.6. Układ automatycznej regulacji z impulsatorami i odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego

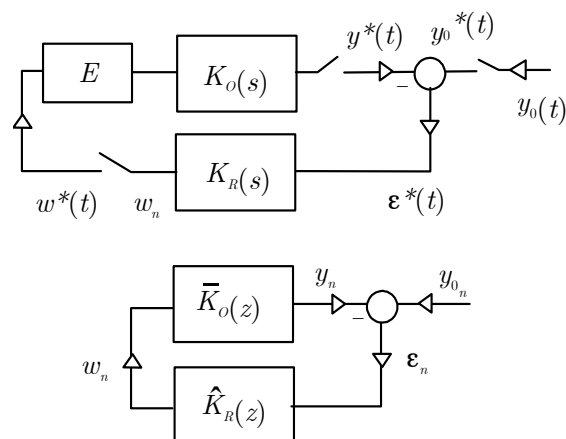
czyli zastępczych, dyskretnych transmitancji obiektu i regulatora, można przeprowadzić analizę powstałego w ten sposób systemu dyskretnego. Możemy badać np. jego stabilność.

W systemie ciągłym pokazanym na rys. 11.6 transmitancją obiektu jest $K_O(s) = 1/(s+2)$, a regulatora $K_R(s) = 5$. Okres impulsowania T jest równy 1. Postępując zgodnie z opisanymi regułami sporządzamy schemat odpowiadającego mu układu dyskretnego, który przedstawiony jest na tym samym rysunku, lecz poniżej. Ustalamy następnie, że – w systemie tym – transmitancją obiektu dyskretnego jest $\hat{K}_O(z) = z/(z - e^{-2})$, patrz przykład 11.1, a regulatora $\hat{K}_R(z) = 5$.

System z ekstrapolatorem oraz odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego przedstawiono na rys. 11.7. Transmitancję $\bar{K}_O(z)$ obiektu dyskretnego wylicza się zgodnie z procedurą (11.7), natomiast transmitancję $\hat{K}_R(z)$ regulatora według (11.5).

Przykład 11.6 Niech w systemie jak na rys. 11.7, transmitancja obiektu ciągłego $K_O(s)$ oraz okres impulsowania T będą jak w przykładzie 11.4.4, natomiast $K_R(s) = k$ niech będzie transmitancją regulatora. Dla schematu systemu dyskretnego pokazanego na tym samym rysunku znajdujemy transmitancję obiektu dyskretnego i otrzymujemy w ten sposób

$$\bar{K}_O(z) = \frac{(1 - e^{-1})z}{(z - 1)(z - e^{-1})},$$



Rys. 11.7. Układ automatycznej regulacji z ekstrapolatorem i odpowiadający mu schemat systemu dyskretnego

patrz przykład 11.4, oraz $\bar{K}_R(z) = k$. Wielomianem charakterystycznym zamkniętego systemu dyskretnego jest zatem

$$\begin{aligned} & (z - 1)z - e^{-1}k + 5(1 - e^{-1})z \\ & = z^2 + (4 - 5e^{-1})z - e^{-1}k. \end{aligned}$$

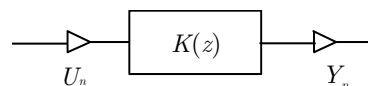
Stosując dowolne z omówionych wcześniej kryteriów, można wyznaczyć współczynnik wzmocnienia regulatora k zapewniający stabilność.

Rozdział 12

Sygnaly losowe w systemach dyskretnych

12.1 Wprowadzenie

Zakładamy teraz, że stabilny system o transmitancji $K(z)$ pobudzany jest stacjonarnym procesem stochastycznym U_n drugiego rzędu, patrz rys. 12.1. Najpierw założymy, że jest on białym szumem, a w kolejnym paragrafie, że jest on skorelowany. Przypominamy ponadto, że \mathbb{E} oznacza wartość oczekiwaną.



Rys. 12.1. System dyskretny o losowym sygnale wejściowym

12.2 System pobudzany białym szumem

Niech teraz U_n będzie białym szumem o zerowej średniej (czyli takim, że $\mathbb{E}U_n = 0$), tzn. procesem o funkcji korelacji $R_U(n) = \sigma_U^2 \delta_n$. Zbadamy teraz własności losowego sygnału wyjściowego, tzn. wyznaczymy jego funkcję korelacji, gęstość widmową oraz funkcję korelacji pomiędzy wejściem i wyjściem. Pamiętając, że $k_n = 0$ dla $n < 0$ wykażemy teraz, że:

- (a) Y_n jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu,
- (b) $\mathbb{E}Y_n = 0, \mathbb{E}Y_n^2 = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- (c) $R_Y(n) = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n}k_i$,
- (d) $R_Y(n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- (e) $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2$,
- (f) $R_{YU}(n) = \sigma_U^2 k_n$.

Zacznijmy od spostrzeżenia, że ze stabilności systemu wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 < \infty$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty$. Wiedząc, że $Y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i U_{n-i}$, znajdujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_n^2 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \mathbb{E}\{U_{n-i} U_{n-j}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(i-j) \\ &= \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \delta_{i-j} = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbb{E}Y_n = 0$, wykazaliśmy zatem (a) oraz (b). Na podstawie definicji funkcji korelacji, patrz (C.3), s. 253,

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= \mathbb{E}\{Y_n Y_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \mathbb{E}\{U_{n-i} U_{-j}\} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \delta_{n-i+j} = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n} k_i, \end{aligned}$$

skąd wynika (c).

Ponieważ $\sum_{i=0}^{\infty} |k_i| < \infty$, więc $\sum_{i=n}^{\infty} |k_i| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem

$$|R_Y(n)| = \sigma_U^2 \left| \sum_{i=n}^{\infty} k_{i-n} k_i \right| \leq \sigma_U^2 \max_n |k_n| \sum_{i=n}^{\infty} |k_i|,$$

co dowodzi prawdziwości (d). Wyliczając transformatę Fouriera funkcji korelacji otrzymujemy, patrz (C.4), s. 254,

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{n+p} k_p e^{-j\omega n} \\ &= \sigma_U^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_{n+p} e^{-j\omega(n+p)} k_p e^{j\omega p} \\ &= \sigma_U^2 \bar{K}(\omega) \bar{K}(-\omega), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{K}(\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej k_n . Ponieważ $\bar{K}(\omega) = K(e^{j\omega})$ oraz $\bar{K}(-\omega) = K^*(e^{j\omega})$, zatem $S_Y(\omega) = \sigma_U^2 |K(e^{j\omega})|^2$, co oznacza, że (e) jest prawdziwe. Na koniec zauważmy, że

$$R_{YU}(n) = \mathbb{E}\{Y_n U_0\} = \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} \mathbb{E}\{U_i U_0\} = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^n k_{n-i} \delta_i = \sigma_U^2 k_n,$$

co oznacza, że (f) także jest prawdziwe.

Przykład 12.1 Niech U_n będzie białym szumem o zerowej średniej i funkcji korelacji δ_n i niech $K(z) = z/(z - \lambda)$, $|\lambda| < 1$. Ponieważ $k_n = \lambda^n$ dla $n \geq 0$ (oraz $k_n = 0$ dla $n < 0$), więc $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}Y_n^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} = 1/(1 - \lambda^2)$ oraz $R_Y(n) = \sum_{i=n}^{\infty} k_{i-n} k_i = \lambda^{-n} \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^{2i} = \lambda^n / (1 - \lambda^2)$. Ponadto $S_Y(\omega) = |K(e^{j\omega})|^2 = 1/(\lambda^2 - 2\lambda \cos \omega + 1)$.

Ćwiczenie 12.1 Wykazać, że jeśli sygnał wejściowy U_n jest stacjonarnym, białym szumem o średniej m_U i funkcji korelacji $R_U(n) = \sigma_U^2 \delta_n + m_U^2$, to:

- (a) $\mathbb{E}Y_n = m_U \sum_{i=0}^{\infty} k_i$,
- (b) $\text{var}[Y_n] = \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- (c) $\mathbb{E}Y_n^2 = m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2 + \sigma_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i^2$,
- (d) $R_Y(n) = \sigma_U^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_{i-n} k_i + m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2$,
- (e) $R_Y(n) \rightarrow m_U^2 (\sum_{i=0}^{\infty} k_i)^2$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- (f) $R_{YU}(n) = \sigma_U^2 k_n + m_U^2 \sum_{i=0}^{\infty} k_i$.

12.3 System przy pobudzeniu skorelowanym

Niech teraz U_n będzie procesem o zerowej średniej i funkcji korelacji $R_U(n)$. Pokażemy, że:

- (α) Y_n jest stacjonarnym procesem drugiego rzędu, $\mathbb{E}Y_n = 0$,
- (β) $R_Y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(n - i + j)$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_{j-n} R_U(j - i)$,
- (γ) $R_Y(n) \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$,
- (δ) $S_Y(\omega) = |K(e^{j\omega})|^2 S_U(\omega)$,
- (ε) $R_{YU}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i R_U(n - i)$, czyli $S_{YU}(\omega) = K(e^{j\omega}) S_U(\omega)$.

Jest oczywiste, że

$$\mathbb{E}Y_n^2 = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=-\infty}^n k_{n-i}k_{n-j}\mathbb{E}\{U_iU_j\} = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{j=-\infty}^n k_{n-i}k_{n-j}R_U(i-j).$$

Ponieważ $|R_U(n)| \leq \mathbb{E}U_n^2$, patrz § C.2, zatem powyższa wartość jest ograniczona przez

$$\mathbb{E}\{U_n^2\} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |k_i k_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |k_i| \right)^2 \mathbb{E}U_n^2.$$

Ponieważ ponadto $\mathbb{E}Y_n = 0$, więc zachodzi (α) . Dalej

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= \mathbb{E}\{Y_n Y_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j \mathbb{E}\{U_{n-i} U_{-j}\} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_i k_j R_U(n-i+j), \end{aligned}$$

skąd wynika (β) . Punkt (γ) weryfikujemy jak w § 7.2. Aby dowieść (δ) zauważamy, że

$$\begin{aligned} S_Y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_p k_q R_U(n-p+q) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_p e^{-j\omega p} k_q e^{j\omega q} R_U(n-p+q) e^{-j\omega(n-p+q)} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_p e^{-j\omega p} \sum_{q=-\infty}^{\infty} k_q e^{j\omega q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_U(n) e^{-j\omega n} \\ &= K(e^{j\omega}) K(e^{-j\omega}) S_U(\omega). \end{aligned}$$

Aby wykazać (ε) , wystarczy zauważyć, że

$$R_{YU}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i \mathbb{E}\{U_{n-i} U_0\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i R_U(i-n).$$

12.4 Regulacja w obecności sygnału losowego

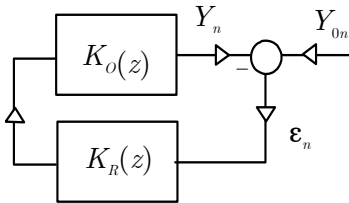
Omówimy teraz zachowanie się systemu automatycznej regulacji w sytuacjach, gdy działają nań sygnały o charakterze losowym. Zakładamy, że system jest

stabilny i pamiętamy, że $K(z) = L(z)/M(z)$ jest transmitancją układu otwartego, w której $L(z)$ i $M(z)$ są wielomianami. Ponadto $K_E(z)$ oraz $K_Z(z)$ są odpowiednio transmitancją uchybową i systemu zamkniętego.

12.4.1 Wartość zadana procesem stochastycznym

Zakładamy teraz, że sygnał zadany Y_{0n} jest stacjonarnym procesem stochastycznym o gęstości widmowej $S_{Y_0}(\omega)$, patrz system na rys. 12.2. Ponieważ $S_E(\omega) = |K_E(j\omega)|^2 S_{Y_0}(\omega)$, więc – jak to wynika z (C.2), s. 250 – możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_E(e^{j\omega})|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 S_{Y_0}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$



Rys. 12.2. Układ automatycznej regulacji. Sygnał wartości zadanej białym szumem

Jeśli sygnał Y_{0n} jest białym szumem o zerowej średniej i wariancji $\sigma_{Y_0}^2$, to

$$\mathbb{E}\varepsilon_n^2 = \frac{\sigma_{Y_0}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{M(j\omega)}{L(j\omega) + M(j\omega)} \right|^2 d\omega.$$

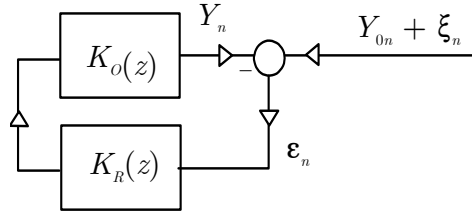
Wartość błędu można wyrazić także następująco:

$$\mathbb{E}\varepsilon_n^2 = \sigma_{Y_0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_{En}^2,$$

gdzie $k_{En} \hat{=} K_E(z)$.

12.4.2 Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Zbadamy teraz zachowanie się układu automatycznej regulacji w sytuacji, gdy do systemu dociera sygnał zadany Y_{0n} zaszumiony stacjonarnym, losowym sygnałem ξ_n , co przedstawiono na rys. 12.3. Zakładamy, że $\mathbb{E}\xi_n = 0$ i przez σ_ξ^2 oznaczamy wariancję zmiennej losowej ξ_n . Zwracamy uwagę, że teraz o jakości systemu świadczy nie uchyb ε_n , lecz błąd $e_n = Y_{0n} - Y_n$. Błąd ten powinien być, w odpowiednim sensie, mały.



Rys. 12.3. Układ automatycznej regulacji. Zaszumiony sygnał wartości zadanej

Argumentując jak w §7.4 zauważamy, że

$$e_n = e_{dn} + e_{\xi n},$$

gdzie $\mathcal{Z}\{e_{dn}\} = K_E(z)Y_0(z)$ oraz

$$\mathcal{Z}\{e_{\xi n}\} = [K_E(z) - 1] \mathcal{Z}\{\xi_n\} = -\frac{L(z)}{L(z) + M(z)} \mathcal{Z}\{\xi_n\}$$

i dochodzimy do wniosku, że

$$\mathbb{E}e_\xi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{e_\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 S_\xi(\omega) d\omega.$$

Jeśli ξ_n jest białym szumem, to

$$\mathbb{E}e_\xi^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{L(e^{j\omega})}{L(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega.$$

Operując czasem, możemy napisać

$$\mathbb{E}e_\xi^2 = \sigma_\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_{Zn}^2,$$

gdzie $k_{Zn} \triangleq K_Z(z)$.

Dodatek A

Transformacja Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest skutecznym narzędziem, przy pomocy którego można rozwiązywać równania różniczkowe. W poniższym dodatku podamy jej definicję i omówimy własności.

A.1 Definicja i własności

A.1.1 Definicja

Załóżmy, że funkcja $f(t)$, gdzie $t \in [0, \infty)$, jest odcinkami ciągła oraz

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\rho t} dt < \infty \quad (\text{A.1})$$

dla pewnego $\rho > 0$. Transformację Laplace'a definiujemy dla niej następująco, patrz np. [9]:

$$F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Przyporządkowuje ona funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej, funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej. Odwrotna transformacja dana jest wzorem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds,$$

gdzie σ jest tak duże, że wszystkie punkty osobliwe funkcji $F(s)$ znajdują się na lewo od prostej $\text{Re } s = \sigma$. Zauważmy, że warunek (A.1) jest spełniony np. przez funkcję $e^{\lambda t}$, λ dowolne, lecz nie jest przez e^{t^2} .

Będziemy także pisać $\mathfrak{L}\{f(t)\} = F(s)$ oraz $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, jak również $f(t) \hat{=} F(s)$. Dla wygody, $f(t)$ będziemy nazywać funkcją oryginalną lub oryginałem funkcji $F(s)$. Stosować będziemy konwencję polegającą na tym, że transformaty funkcji np. $f(t)$, $g_i(t)$ oznacza się odpowiednio jako $F(s)$, $G_i(s)$.

Zarówno \mathfrak{L} jak i \mathfrak{L}^{-1} są operacjami liniowymi, co oznacza, że

$$\boxed{\alpha f(t) + \beta g(t) \hat{=} \alpha F(s) + \beta G(s).}$$

Podane poniżej, nietrudne do sprawdzenia reguły są pomocne przy znajdowaniu transformat różnych funkcji:

- zmiana skali, $\alpha \neq 0$,

$$\boxed{f(\alpha t) \hat{=} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)}$$

- transformata pochodnej w sensie funkcyjnym (patrz także wzór (A.11))

$$f'(t) \hat{=} sF(s) - f(0) \tag{A.2}$$

- transformata całki

$$\boxed{\int_0^t f(\tau) d\tau \hat{=} \frac{1}{s} F(s)}$$

- różniczkowanie względem s

$$\boxed{tf(t) \hat{=} -\frac{d}{ds} F(s)}$$

- przesunięcie względem s

$$\boxed{e^{\alpha t} f(t) \hat{=} F(s - \alpha)}$$

- transformata splotu

$$\boxed{\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \hat{=} F(s)G(s)}$$

- transformata opóźnienia, $\tau > 0$,

$$\boxed{f(t - \tau) \hat{=} e^{\tau s} F(s).}$$

Przykład A.1 Dwukrotne zastosowanie reguły (A.2) doprowadza do wzoru

$$f''(t) \hat{=} s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Ogólnie

$$f^{(n)}(t) \hat{=} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Ćwiczenie A.1 Aby zweryfikować regułę (A.2) o transformacie pochodnej, zakładamy, że $f(t)$ jest funkcją różniczkowalną na półprostej $[0, \infty)$ i zauważamy, że całkując przez części otrzymujemy

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Zakładając następnie, że, dla pewnego λ , $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\lambda t} = 0$, otrzymujemy (A.2).

Ćwiczenie A.2 Jest oczywiste, że transformata splotu $\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$ jest

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau e^{-st} \right] dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t - \tau)e^{-s(t-\tau)}g(\tau)e^{-s\tau} d\tau dt \\ &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau} d\tau, \end{aligned}$$

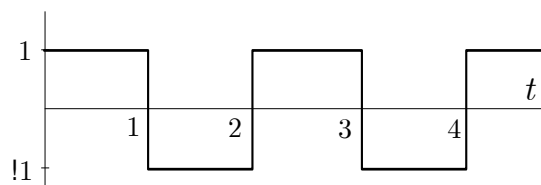
czyli $F(s)G(s)$.

Ćwiczenie A.3 Wykazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie T , to $X(s) = X_T(s)/(1 - e^{-sT})$, gdzie $X_T(s) = \int_0^T x(t)e^{-st} dt$.

Ćwiczenie A.4 Korzystając z rezultatu otrzymanego w ostatnim ćwiczeniu wykazać, że transformata Laplace'a fali prostokątnej o kształcie przedstawionym na rys. A.1 jest $(1 - e^{-s})^2/s(1 - e^{-2s})$.

Ćwiczenie A.5 Wykazać, że jeśli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie T , to $\mathfrak{L}\{e^{-at}x(t)\} = X_T(s + a)/(1 - e^{-(s+a)T})$, gdzie $X_T(s) = \int_0^T x(t)e^{-st} dt$.

Ćwiczenie A.6 Wykazać, że $\sum_{n=0}^\infty x(t - nT) \hat{=} X(s)/(1 - e^{Ts})$.



Rys. A.1. Fala prostokątna; patrz ćwiczenie A.4

A.1.2 Transformaty wybranych funkcji

Wyznamy teraz transformaty kilku funkcji. Przypominamy przy tym, że transformacji poddawane są funkcje, których dziedziną jest półprosta $[0, \infty)$. W celu znalezienia transformaty funkcji $f(t) = 1$, tzn. funkcji stałej na całej półprostej $t \in [0, \infty)$, korzystamy z definicji otrzymując $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = 1/s$. Zatem

$$\boxed{1 \hat{=} \frac{1}{s}} \quad (\text{A.3})$$

Stosując regułę o przesunięciu względem s , dostajemy

$$\boxed{e^{-at} \hat{=} \frac{1}{s+a}} \quad (\text{A.4})$$

natomiast korzystając $n-1$ razy z reguły o różniczkowaniu względem s , otrzymujemy

$$\boxed{\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \hat{=} \frac{1}{s^n}} \quad (\text{A.5})$$

Reguła o przesunięciu względem s daje teraz

$$\boxed{\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \hat{=} \frac{1}{(s+a)^n}} \quad (\text{A.6})$$

Powyższy wzór możemy otrzymać stosując wobec (A.4) $n-1$ razy regułę o różniczkowaniu względem s .

Ponieważ $2j \sin \omega t = e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}$ oraz $2 \cos \omega t = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}$, więc stosując (A.4), otrzymujemy

$$\boxed{\sin \omega t \hat{=} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

oraz

$$\cos \omega t \hat{=} \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Reguła o przesunięciu względem s doprowadza do

$$e^{-\sigma t} \sin \omega t \hat{=} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

oraz

$$e^{-\sigma t} \cos \omega t \hat{=} \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}.$$

Odwołanie się do reguły o różniczkowaniu względem s daje

$$t \sin \omega t \hat{=} \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

oraz

$$t \cos \omega t \hat{=} \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Pamiętając teraz, że $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t$ oraz $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t$, otrzymujemy

$$\sin(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

oraz

$$\cos(\omega t + \varphi) \hat{=} \frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}.$$

Przykład A.2 Oznaczając $\alpha = e^{j\varphi}$ i zauważając, że

$$\frac{\alpha}{s + j\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s - j\omega} \hat{=} e^{j(\varphi - \omega t)} + e^{-j(\varphi - \omega t)},$$

stwierdzamy, że

$$\frac{\alpha}{s + j\omega} + \frac{\bar{\alpha}}{s - j\omega} \hat{=} 2 \cos(\omega t - \varphi).$$

Przykład A.3 Niech $\alpha = e^{j\varphi}$. Korzystając z (A.6), otrzymujemy

$$\frac{\alpha}{(s+j\omega)^n} + \frac{\bar{\alpha}}{(s-j\omega)^n} \hat{=} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \left(e^{j(\varphi-\omega t)} + e^{-j(\varphi-\omega t)} \right),$$

skąd wynika

$$\frac{\alpha}{(s+j\omega)^n} + \frac{\bar{\alpha}}{(s-j\omega)^n} \hat{=} \frac{2}{(n-1)!} t^{n-1} \cos(\omega t - \varphi).$$

Przykład A.4 Niech $\eta = \sigma + j\omega$ i $\alpha = e^{j\varphi}$. Korzystając z ostatnich dwóch przykładów i stosując regułę o przesunięciu względem s , otrzymujemy

$$\frac{\alpha}{s+\eta} + \frac{\bar{\alpha}}{s+\bar{\eta}} \hat{=} 2e^{-\sigma t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (\text{A.7})$$

oraz

$$\frac{\alpha}{(s+\eta)^n} + \frac{\bar{\alpha}}{(s+\bar{\eta})^n} \hat{=} \frac{2}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\sigma t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (\text{A.8})$$

Przykład A.5 Oznaczając $\psi = \arcsin(b/\sqrt{a^2+b^2})$, zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2} \hat{=} \cos\psi \cos\omega t + \sin\psi \sin\omega t.$$

Zatem

$$\frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2} \hat{=} \sqrt{a^2+b^2} \cos(\omega t - \psi).$$

Korzystając z reguły o przesunięciu względem s , otrzymujemy

$$\frac{a(s+\sigma)+b\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \hat{=} \sqrt{a^2+b^2} e^{-\sigma t} \cos(\omega t - \psi).$$

Ćwiczenie A.7 Niech $l_n(t) = e^{-t/2} L_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie $L_n(t) = (1/n!) e^t (d^n/dt^n)(t^n e^{-t})$ są tzw. wielomianami Laguerre'a¹. Funkcje $l_n(t)$ tworzą zupełny układ funkcji ortonormalnych na półprostej $[0, \infty)$, co oznacza między innymi, że $\int_0^\infty l_n(t) l_m(t) dt = 0$ dla $n \neq m$ oraz $\int_0^\infty l_n^2(t) dt = 1$. Sprawdzić, że $L_0(t) = 1$, $L_1(t) = t - 1$, $L_2(t) = t^2/2 - 2t + 1$, itd. Wykazać, że $L_n(t) \hat{=} (s-1)^n / s^{n+1}$ i, siłą rzeczy, $l_n(t) \hat{=} 2(2s-1)^n / (2s+1)^{n+1}$. Jeśli zatem $k(t) = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n l_n(t)$, to $K(s) = 2 \sum_{n=0}^\infty \alpha_n (2s-1)^n / (2s+1)^{n+1}$.

Ćwiczenie A.8 Wykazać, że $\log t \hat{=} -(\gamma + \log s)/s$, gdzie $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \log x dx$ jest stałą Eulera, a następnie, że $1/t \hat{=} -\log s - \gamma$.

Przykład A.6 Transformata Laplace'a może nie być funkcją wymierną, np. $\delta(t-T) \hat{=} e^{-sT}$, $1(t-T) \hat{=} e^{-sT}/s$, $1/\sqrt{t} \hat{=} \sqrt{\pi}/\sqrt{s}$. Patrz także ćwiczenie ostatnie oraz A.4.

¹G. Sansone, *Orthogonal Functions*, Dover, New York, 1991.

A.1.3 Funkcje określone na całej osi czasu

W wielu zastosowaniach transformacji Laplace'a poddaje się funkcje określone na całej prostej $t \in (-\infty, \infty)$ i w specyficzny, podyktowany względami praktycznymi sposób traktuje się operację różniczkowania. Prowadzi to do zmiany reguły o transformacji pochodnej. Zakładamy przy tym, że transformowane funkcje są odcinkami prawostronnie ciągłe.

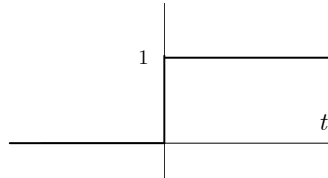
Omówimy najpierw różniczkowanie rozumiane klasycznie, czyli takie, którego rezultatem jest funkcja, czyli tzw. różniczkowanie funkcyjne. Następnie zajmiemy się różniczkowaniem, w którym dopuszcza się, aby pochodną funkcji była tzw. dystrybucja (np. impuls Diraca), czyli różniczkowaniem w sensie dystrybucyjnym.

Różniczkowanie w sensie funkcyjnym

Zacniemy od prostego przykładu, a mianowicie funkcji

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ 1, & \text{dla } t \geq 0, \end{cases}$$

nazywanej skokiem jednostkowym, której dziedziną jest cała prosta $(-\infty, \infty)$, patrz rys. A.2.



Rys. A.2. Skok jednostkowy $1(t)$

Jest oczywiste, że

$$\mathfrak{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s},$$

porównaj z (A.3). Skok jednostkowy jest funkcją prawostronnie ciągłą i różniczkowalną w klasyczny sposób na całej prostej z wyjątkiem punktu $t = 0$, przy czym

$$\frac{d}{dt}1(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ \text{nieokreślone}, & \text{dla } t = 0 \\ 0, & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Zatem

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{d}{dt} 1(t) \right\} = 0,$$

skąd wynika, że

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{d}{dt} 1(t) \right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0).$$

Oznacza to, że reguła (A.2) o transformacie pochodnej obowiązuje w stosunku do skoku jednostkowego, pomimo że teraz $t \in (-\infty, \infty)$. Ogólnie, reguła (A.2) o różniczkowaniu w sensie funkcyjnym jest prawdziwa także dla funkcji określonych na całej prostej.

Różniczkowanie w sensie dystrybucyjnym

Wprowadzimy teraz pojęcie tzw. impulsu Diraca, oznaczanego jako $\delta(t)$, który nie jest funkcją, lecz tzw. dystrybucją, patrz np. [11]. Jako jego definicję przyjmujemy następujące dwa wzory:

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ \infty, & \text{dla } t = 0 \\ 0, & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau \stackrel{\text{def}}{=} f(0), \quad (\text{A.10})$$

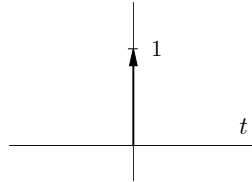
dla każdej funkcji $f(t)$ określonej na prostej $(-\infty, \infty)$, ciągłej w punkcie $\tau = 0$. Jest więc oczywiste, że $\delta(t)$ nie jest funkcją (gdyby bowiem była, wtedy z uwagi na pierwszy z powyższych wzorów należałoby napisać $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = 0$). W szczególności, przyjmując $f(t) = 1$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Graficznie impuls Diraca przedstawiamy jak na rys. A.3.

Zwróćmy uwagę na to, że powyższe dwa wzory definiujące impuls Diraca nie wystarczają, aby poddać go transformacji Laplace'a. Aby to było możliwe, przyjmujemy dodatkowo, że

$$\int_0^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)$$

Rys. A.3. Impuls Diraca $\delta(t)$

dla każdej funkcji $f(t)$ ciągłej prawostronnie w punkcie $t = 0$, co oznacza pewne uzupełnienie drugiego z wzorów definiujących impuls Diraca. Wynika stąd, że $\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = 1$, czyli

$$\boxed{\delta(t) \doteq 1}$$

Ponadto

$$\int_0^t \delta(\tau)d\tau = 1(t),$$

co oznacza, że skok jednostkowy jest całką impulsu Diraca. W związku z tym będziemy mówić, że impuls Diraca jest pochodną skoku, tzn. że

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t),$$

przy czym pochodną rozumie się w sensie dystrybucyjnym, a nie funkcyjnym, porównaj z (A.9).

Oznaczając $1(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} 1(t)$, zauważamy, że

$$\mathfrak{L} \left\{ \frac{d}{dt}1(t) \right\} = s\mathfrak{L}\{1(t)\} - 1(0-),$$

gdyż $1(0-) = 0$. Wzór powyższy można uważać za modyfikację reguły (A.2) o transformacie pochodnej. Jest ona spowodowana tym, że skok jednostkowy traktujemy teraz jako funkcję na całej prostej $(-\infty, \infty)$, a pochodną rozumiemy w sensie dystrybucyjnym.

Ogólnie zatem, jeśli funkcja $f(t)$ ma w punkcie $t = 0$ skok o wysokości α i jest w nim ponadto prawostronnie ciągła, to można ją przedstawić w postaci $f(t) = \alpha 1(t) + \varphi(t)$, gdzie $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $t = 0$. Dzięki temu łatwo zauważyć, że reguła o transformacie pochodnej rozumianej w sensie dystrybucyjnym jest następująca:

- transformata pochodnej w sensie dystrybucyjnym

$$\boxed{f'(t) \hat{=} sF(s) - f(0-)} \quad (\text{A.11})$$

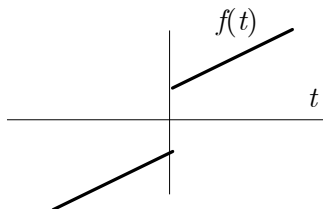
gdzie $f(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)$.

Różnica między wzorami (A.2) i (A.11) polega na różnym sposobie uwzględnienia warunku początkowego, co jest spowodowane różnym rozumieniem pochodnej. Jeśli jednak $f(t)$ jest ciągła w punkcie $t = 0$, to $f(0) = f(0-)$ i wzory te stają się identyczne.

Przykład A.7 *Niech*

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{dla } t < 0 \\ t + 1, & \text{dla } t \geq 0 \end{cases},$$

patrz rys. A.4. Zatem $f(t) = t - 1 + 2 \times 1(t)$ i $f'(t) = 1 + 2\delta(t)$. Ponieważ $f(t) = t + 1$ dla $t \geq 0$, więc $\mathfrak{L}\{f(t)\} = 1/s^2 + 1/s$. Ponadto $\mathfrak{L}\{f'(t)\} = 1/s + 2$ oraz $f(0-) = -1$. Reguła (A.11) potwierdza się.



Rys. A.4. Wykres funkcji $f(t)$, przykład A.7

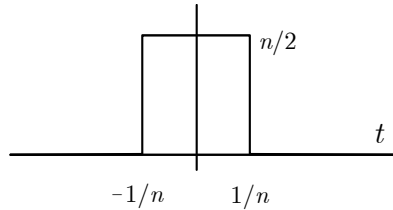
Na mocy definicji przyjmujemy ponadto $\delta^{(i)}(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{s^i\}$, $i = 1, 2, \dots$, co nazywamy i -tą pochodną impulsu Diraca. Dzięki powyższemu, transformacji Laplace'a można poddawać zarówno funkcje, jak i impuls Diraca wraz z jego pochodnymi, a także ich liniowe kombinacje.

Należy teraz podkreślić, że, poza pewnymi wcześniejszymi fragmentami niniejszego dodatku, operujemy wszędzie funkcjami określonymi na całej prostej i pochodną funkcji rozumiemy dystrybucyjnie. W związku z tym stosujemy regułę (A.11), a nie (A.2).

Uwaga A.1 Impuls Diraca $\delta(t)$ można uważać za swoiście, tzn. dystrybucyjnie, rozumianą granicę ciągu funkcji $\varphi_n(t)$ zdefiniowanych następująco:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n/2, & \text{dla } |t| \leq 1/n \\ 0, & \text{dla } |t| > 1/n \end{cases} ,$$

patrz rys. A.5. Zauważmy, że $\varphi_n(t)$ ma kształt prostokąta o podstawie $[-1/n, 1/n]$, wysokości $n/2$ i polu powierzchni równym 1. Jest oczywiste, że



Rys. A.5. Wykres funkcji $\varphi_n(t)$, uwaga A.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = f(0)$$

dla każdej funkcji $f(t)$ ciągłej w punkcie $t = 0$. Przyjmując więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \delta(t) \tag{A.12}$$

(w sensie dystrybucyjnym), definiujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = f(0).$$

Przyjeliśmy przy tym milcząco, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) dt.$$

Na koniec zauważmy, że ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(t) dt = \infty$, więc w świetle powyższego jest oczywiste, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t) dt = \infty. \tag{A.13}$$

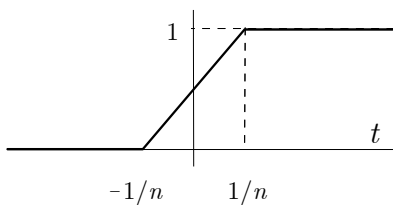
Uwaga A.2 Nawiązując do poprzedniej uwagi zauważmy, że

$$\int_{-\infty}^t \varphi_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < -1/n \\ (nt + 1)/2, & \text{dla } -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & \text{dla } t > 1/n, \end{cases}$$

patrz także rys. A.6. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t \varphi_n(\xi) d\xi = 1(t).$$

Wzór ten wraz z (A.12) wyraźnie koresponduje z tym, że $\int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = 1(t)$.



Rys. A.6. Wykres funkcji $\int_0^t \varphi_n(\xi) d\xi$, uwaga A.2

Uwaga A.3 Jako funkcje $\varphi_n(t)$ w ostatnich dwóch uwagach można równie dobrze przyjąć np. $(1/2)e^{-|t|}$ lub $(1/\sqrt{\pi})e^{-t^2}$.

A.2 Rozkład na ułamki proste, funkcja oryginalna

Przez \bar{s} oznaczamy liczbę sprzężoną względem s , tzn. $\bar{s} = \text{Re } s - j \text{Im } s$. Dla funkcji, powiedzmy $F(s)$, $F^*(s)$ oznacza funkcję sprzężoną względem $F(s)$, czyli $F^*(s) = \text{Re } F(s) - j \text{Im } F(s)$.

A.2.1 Rozkład na ułamki proste

Funkcję

$$M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

gdzie s jest zespolone, a wszystkie współczynniki a_0, a_1, \dots, a_m są rzeczywiste, przy czym $a_m \neq 0$, nazywa się wielomianem stopnia m . Łatwo sprawdzić, że

$$M(\bar{s}) = M^*(s), \tag{A.14}$$

gdzie $M^*(s)$ oznacza funkcję sprzężoną względem $M(s)$.

Równanie $M(s) = 0$ ma dokładnie m pierwiastków, które nazywają się także pierwiastkami wielomianu $M(s)$. Oznaczając je przez s_1, s_2, \dots, s_m , można zatem napisać

$$M(s) = a_m(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_m). \quad (\text{A.15})$$

Pierwiastki te mogą być rzeczywiste lub zespolone. Zauważmy, że $M(s) = 0$ pociąga za sobą równość $M^*(s) = 0$. Wykorzystując (A.14), otrzymujemy $M^*(s) = M(\bar{s})$, skąd wynika $M(\bar{s}) = 0$. Jeśli zatem s jest zespolonym pierwiastkiem wielomianu $M(s)$, to \bar{s} także. Pierwiastki zespolone występują zatem parami, w których jeden jest sprzężony względem drugiego. Zarówno pierwiastki rzeczywiste, jak i pary zespolonych pierwiastków sprzężonych mogą być pojedyncze lub wielokrotne. Wykazaliśmy więc następujący lemat:

Lemat A.1 *Pierwiastki równania $M(s) = 0$ są*

- ▶ *rzeczywiste lub*
- ▶ *zespolone, parami sprzężone.*

Funkcję postaci $N(s)/M(s)$, gdzie

$$N(s) = b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0,$$

przy czym $b_n \neq 0$, nazywa się wymierną. W szczególności każdy wielomian jest funkcją wymierną. Inne to np.

$$\frac{s-4}{s+1}, \quad \frac{s+5}{(s+2)(s-3)}.$$

Mówimy, że $s = -1$ jest biegunem pierwszej, a $s = -2$ i $s = 3$ biegunami drugiej z tych funkcji.

Lemat A.2 *Dla funkcji wymiernej $W(s)$ zachodzi równość $W(\bar{s}) = W^*(s)$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z (A.14). ■

Funkcje wymierne postaci

$$\frac{a}{(s-\rho)^n} \quad \text{oraz} \quad \frac{as+b}{(s^2+ps+q)^n},$$

$n = 1, 2, \dots$, gdzie ρ jest rzeczywiste i $p^2 - 4q < 0$, nazywamy ułamkami prostymi. Podamy teraz twierdzenia o rozkładzie funkcji wymiernej $N(s)/M(s)$ na ułamki proste, tzn. o tym, jak ją przedstawić jako liniową kombinację takich ułamków. Dla wygody dopuścimy, aby ρ mogło być także zespolone. Założymy przy tym, że:

- $n < m$,
- wielomiany $N(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych pierwiastków.

Twierdzenie A.1 (bieguny dowolne) Załóżmy, że $n < m$. Niech równanie $M(s) = 0$ ma rozwiązania:

- ▷ rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, różne o krotnościach k_1, k_2, \dots, k_p ,
 ▷ pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$,
 różne o krotnościach $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_q$
 (co oznacza, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = m$). Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right], \quad (\text{A.16})$$

gdzie:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right],$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{ds^{\kappa_i-j}} \left[(s - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right].$$

Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Dowód składa się z dwóch części. W pierwszej wykażemy poprawność rozkładu, tzn. pokażemy, że istnieją współczynniki α_{ij} , β_{ij} i γ_{ij} takie, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(s - \eta_i)^j} + \frac{\gamma_{ij}}{(s - \bar{\eta}_i)^j} \right], \quad (\text{A.17})$$

a w drugiej je wyznaczymy.

Dowód poprawności rozkładu

Ponieważ $M(s) = (s - \xi_1)^{k_1} R(s)$, gdzie $R(s)$ jest wielomianem stopnia $m - k_1$, więc

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(s)}{(s - \xi_1)^{k_1} R(s)}.$$

Wykażemy, że istnieje liczba α_{1k_1} i wielomian $N_1(s)$ stopnia nie wyższego niż $n - 1$ takie, że

$$\frac{N(s)}{(s - \xi_1)^{k_1} R(s)} = \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} + \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-1} R(s)},$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$\frac{N(s) - \alpha_{1k_1}R(s)}{(s - \xi_1)^{k_1}R(s)} = \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-1}R(s)}.$$

Ma to miejsce, gdy α_{1k_1} jest takie, że $s - \xi_1$ jest dzielnikiem wielomianu $N(s) - \alpha_{1k_1}R(s)$, tzn. wtedy, gdy ξ_1 jest rozwiązaniem równania $N(\xi) - \alpha_{1k_1}R(\xi) = 0$. Wówczas bowiem

$$N_1(s) = \frac{N(s) - \alpha_{1k_1}R(s)}{s - \xi_1}$$

jest wielomianem. Ma to faktycznie miejsce dla

$$\alpha_{1k_1} = \frac{N(\xi_1)}{R(\xi_1)}.$$

Zatem

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} = \frac{N_1(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-1}R(s)}.$$

W następnym kroku postępujemy podobnie wobec prawej strony powyższej równości, tzn. wykazujemy, że istnieje α_{1k_1-1} oraz wielomian $N_2(s)$ stopnia nie wyższego niż $n - 2$ takie, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \frac{\alpha_{1k_1}}{(s - \xi_1)^{k_1}} - \frac{\alpha_{1k_1-1}}{(s - \xi_1)^{k_1-1}} = \frac{N_2(s)}{(s - \xi_1)^{k_1-2}R(s)}.$$

Postępując w ten sposób dowodzimy, że

$$\frac{N(s)}{M(s)} - \sum_{j=1}^{k_1} \frac{\alpha_{1j}}{(s - \xi_1)^j} = \frac{N_{k_1}(s)}{R(s)},$$

gdzie $N_{k_1}(s)$ i $R(s)$ są wielomianami stopnia nie wyższych niż $n - k_1$ i $m - k_1$. Powtarzając tę argumentację wobec pozostałych biegunów funkcji $N(s)/M(s)$ dochodzimy do wniosku, że rozkład (A.17) jest poprawny.

Wyznaczenie współczynników rozkładu

Zacniemy od ξ_i . Z rozkładu (A.17) wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{N(s)}{M(s)} &= \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(s - \xi_i)^j} + R_i(s) \\ &= \frac{\alpha_{ik_i}}{(s - \xi_i)^{k_i}} + \frac{\alpha_{i,k_i-1}}{(s - \xi_i)^{k_i-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{i1}}{s - \xi_i} + R_i(s), \end{aligned}$$

gdzie $R_i(s)$ jest funkcją wymierną nie mającą bieguna w punkcie ξ_i . Zatem

$$(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} = \alpha_{ik_i} + \sum_{j=1}^{k_i-1} \alpha_{ij} (s - \xi_i)^{k_i-j} + (s - \xi_i)^{k_i} R_i(s),$$

skąd wnioskujemy o prawdziwości wzoru określającego α_{ik_i} . Różniczkując powyższe wyrażenie $k_i - j$ razy, znajdujemy

$$\frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \xi_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right] = (k_i - j)! \alpha_{ij} + \psi_i(s),$$

gdzie $\psi_i(\xi_i) = 0$, co prowadzi do wniosku o poprawności wzoru określającego α_{ij} , $j = 1, \dots, k_i - 1$. Z tej samej zasady wynika prawidłowość formuły podającej współczynniki β_{ij} . Jest ponadto oczywiste, że

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{s \rightarrow \eta_i} \frac{d^{k_i-j}}{ds^{k_i-j}} \left[(s - \bar{\eta}_i)^{k_i} \frac{N(s)}{M(s)} \right].$$

Należy zatem jeszcze pokazać, że $\gamma_{ij} = \bar{\beta}_{ij}$. Zauważmy w tym celu, że $\beta_{ij} = W(\eta_i)/V(\eta_i)$ oraz $\gamma_{ij} = W(\bar{\eta}_i)/V(\bar{\eta}_i)$, gdzie $W(s)$ i $V(s)$ są pewnymi wielomianami. Odwołując się teraz do lematu A.2 wnioskujemy, że $\beta_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$ oraz stwierdzamy, że wszystkie współczynniki rozkładu są poprawnie wyznaczone.

Pozostało jeszcze wykazanie, że współczynniki przy ułamkach

$$\frac{1}{(s - \xi_1)^{k_1}}, \dots, \frac{1}{(s - \xi_p)^{k_p}}$$

oraz

$$\frac{1}{(s - \eta_1)^{\kappa_1}}, \frac{1}{(s - \bar{\eta}_1)^{\kappa_1}}, \dots, \frac{1}{(s - \eta_q)^{\kappa_q}}, \frac{1}{(s - \bar{\eta}_q)^{\kappa_q}}$$

nie są zerowe. Jest to oczywiste. Jeśli bowiem przynajmniej jeden z nich byłby równy zero, to mianownik funkcji wymiernej w (A.16) miałby stopień niższy od m , co prowadziło do sprzeczności. Dowód został więc zakończony. ■

W sytuacji, gdy bieguny są jednokrotne, prawdziwe jest następujące twierdzenie, będące w istocie wnioskiem z poprzedniego:

Twierdzenie A.2 (bieguny jednokrotne) *Załóżmy, że $n < m$. Niech wielomian $M(s)$ ma wszystkie pierwiastki jednokrotne, a dokładnie:*

▷ *rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, oraz*

▷ pary zepolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$ (co oznacza, że $p + q = m$). Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{s - \xi_i} + \sum_{i=1}^q \left[\frac{\beta_i}{s - \eta_i} + \frac{\bar{\beta}_i}{s - \bar{\eta}_i} \right], \quad (\text{A.18})$$

gdzie:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(\xi_i)}{M'(\xi_i)},$$

$$\beta_i = \lim_{s \rightarrow \eta_i} (s - \eta_i) \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{N(\eta_i)}{M'(\eta_i)}.$$

Ponadto $\alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, p$ oraz $\beta_i \neq 0, i = 1, \dots, q$.

Dowód. Pierwsze części wzorów określających współczynniki α_i oraz β_i są poprawne, co wynika z poprzedniego twierdzenia. Aby wykazać prawdziwość drugich, zauważamy, że

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \xi_i} (s - \xi_i) \frac{N(s)}{M(s)} \\ &= N(\xi_i) \lim_{s \rightarrow \xi_i} \frac{s - \xi_i}{M(s)} = \frac{N(\xi_i)}{M'(\xi_i)}, \end{aligned}$$

co jest rezultatem zastosowania reguły de'Hospitala.

Należy jeszcze wykazać, że wszystkie współczynniki rozkładu są różne od zera. Zauważmy, że jeśli któryś jest równy zero, to prawa strona w (A.18) jest funkcją wymierną, której wielomian znajdujący się w mianowniku jest stopnia niższego niż m , co jest niemożliwe. Dowód został więc zakończony. ■

A.2.2 Twierdzenia o funkcji oryginalnej

Pokażemy teraz, w jaki sposób wyznaczyć oryginał funkcji wymiernej.

Twierdzenie A.3 (bieguny dowolne) Załóżmy, że $n < m$. Niech pierwiastki wielomianu $M(s)$, a także współczynniki α_{ij} oraz β_{ij} będą jak w twierdzeniu A.1. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{N(s)}{M(s)} &\hat{=} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\xi_i t} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t - \varphi_{ij}), \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

gdzie $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$. Ponadto $\alpha_{ik_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_{i\kappa_i} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Dowód jest prosty. Wystarczy bowiem skorzystać z twierdzenia A.1 oraz (A.6) i (A.8). ■

Twierdzenie A.4 (bieguny jednokrotne) Załóżmy, że $n < m$. Niech pierwiastki wielomianu $M(s)$, α_i oraz β_i będą jak w twierdzeniu A.2. Wówczas

$$\frac{N(s)}{M(s)} \hat{=} \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\xi_i t} + 2 \sum_{i=1}^q |\beta_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

gdzie $\varphi_i = \arg \beta_i$. Ponadto $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p$, oraz $\beta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia A.2, (A.4) i (A.7). ■

Przykład A.8 Jest oczywiste, że

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}.$$

Stąd $1 = a(s+2) + b(s+1)$. Podstawiając kolejno $s = -1$ oraz $s = -2$, otrzymujemy $a = 1$ i $b = -1$. Oryginałem jest więc $e^{-t} - e^{-2t}$.

Przykład A.9 Wychodząc z rozkładu

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1},$$

dostajemy $1 = A(s+1) + Bs$. Podstawienia $s = 0$ oraz $s = -1$ dają $A = 1$ oraz $B = -1$. Funkcja oryginalna jest zatem równa $1 - e^{-t}$.

Przykład A.10 Ponieważ

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\beta}{s+2}, \quad (\text{A.20})$$

więc $1 = \alpha_2(s+2) + \alpha_1(s+1)(s+2) + \beta(s+1)^2$. Podstawienia $s = -1$ oraz $s = -2$ dają $\alpha_2 = 1$ oraz $\beta = 1$. Zaczynając jeszcze raz od (A.20), dostajemy

$$\frac{1}{s+2} = \alpha_2 + \alpha_1(s+1) + \beta \frac{(s+1)^2}{s+2},$$

a następnie różniczkując obie strony otrzymujemy

$$\frac{-1}{(s+2)^2} = \alpha_1 + \beta \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^2}{s+2}.$$

Ponieważ

$$\left. \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^2}{s+2} \right|_{s=-1} = 0,$$

zatem podstawienie $s = -1$ daje $\alpha_1 = -1$. Ostatecznie

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2},$$

skąd wynika że oryginałem jest $te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$.

Przykład A.11 Ponieważ

$$\frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s-2},$$

a zatem

$$s+3 = a(s-2) + b(s+1).$$

Wyznamy teraz współczynniki rozkładu trzema metodami.

► Sposób 1. Grupując wyrazy, otrzymujemy

$$s+3 = (a+b)s + (-2a+b).$$

Porównanie współczynników wielomianów po obu stronach prowadzi do układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, a mianowicie: $a+b=1$ oraz $-2a+b=3$, skąd wynika, że $a=-2/3$ i $b=5/3$.

► Sposób 2. Ponieważ funkcje po obu stronach są sobie równe dla wszystkich s , więc podstawiając np. $s=0$ i $s=1$, otrzymujemy także dwa równania z dwiema niewiadomymi: $3=-2a+b$ oraz $4=-a+2b$.

► Sposób 3. Z uwagi na to, że funkcje po obu stronach są sobie równe dla wszystkich s , to są sobie równe w szczególności dla $s=-1$ i $s=2$. Wynika stąd bezpośrednio, że $2=-3a$ i $5=3b$.

Ponieważ

$$\frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = -\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{5}{3} \frac{1}{s-2},$$

zatem oryginałem jest $(-2/3)e^{-t} + (5/3)e^{-2t}$.

Przykład A.12 Rozkład

$$\frac{s+1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\beta}{s+2}$$

jest oczywisty. Zauważmy, że $s = -1$ jest miejscem zerowym wielomianów w liczniku i mianowniku. Aby znaleźć współczynniki rozwinięcia, zaczynamy od

$$s+1 = \alpha_2(s+2) + \alpha_1(s+1)(s+2) + \beta(s+1)^2,$$

skąd po podstawieniu $s = -1$ i $s = -2$, otrzymujemy $\alpha_2 = 0$ i $\beta = -1$. Postępując dalej zgodnie z metodą, otrzymujemy

$$\frac{s+1}{s+2} = \alpha_2 + \alpha_1(s+1) + \beta \frac{(s+1)^2}{s+2},$$

co po zróżniczkowaniu daje

$$\frac{1}{(s+2)^2} = \alpha_1 + \beta \frac{d}{ds} \frac{(s+1)^2}{s+2}.$$

Podstawiając $s = -1$, dostajemy $\alpha_1 = 1$. Ostatecznie

$$\frac{s+1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

skąd wynika, że oryginałem jest $e^{-t} - e^{-2t}$. Warto teraz sprawdzić, że rozwinięcie funkcji, którą otrzymuje się po usunięciu bieguna w punkcie -1 jest takie same, tzn.

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

Przykład A.13 Dla $a \neq b$ prawdziwa jest tożsamość

$$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}.$$

Zatem

$$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)} \hat{=} e^{at} - e^{bt}.$$

Przykład A.14 Niech $W(s) = s^2 + ps + q$ i niech $\Delta = p^2 - 4q$, $\sigma = -p/2$ oraz $\omega = (1/2)\sqrt{|\Delta|}$. Ponieważ $s_{1,2} = (1/2)(-p \pm \sqrt{\Delta})$, są pierwiastkami wielomianu $W(s)$, możemy zatem napisać $W(s) = (s - s_1)(s - s_2)$.

▷ Niech $\Delta > 0$. Pierwiastki są różne, rzeczywiste i dlatego, korzystając z ostatniego przykładu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + ps + q} &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-(p/2)t} \left(e^{(\sqrt{\Delta}/2)t} - e^{-(\sqrt{\Delta}/2)t} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} e^{\sigma t} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}). \end{aligned}$$

▷ Dla $\Delta < 0$ pierwiastki $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ są zespolone. Zatem

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \hat{=} \frac{1}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t.$$

▷ Dla $\Delta = 0$ pierwiastki $s_{1,2} = -p/2$ są rzeczywiste. Wynika stąd, że

$$\frac{1}{s^2 + ps + q} \hat{=} t e^{-(p/2)t} = t e^{\sigma t}.$$

Przykład A.15 Jak nietrudno sprawdzić,

$$\frac{1}{s^n(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{k+1}},$$

skąd wynika, że

$$\frac{a^n}{s^n(s-a)} = \frac{1}{s-a} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{s^{k+1}}$$

oraz

$$\frac{a^n}{s(s+a)^n} = \frac{1}{s} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{(s+a)^{k+1}}.$$

Zatem

$$\frac{a^n}{s^n(s-a)} \hat{=} e^{at} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} t^k$$

oraz

$$\frac{a^n}{s(s+a)^n} \hat{=} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} t^k e^{-at}. \quad (\text{A.21})$$

Przykład A.16 Przez rozkład na ułamki proste można sprawdzić, że

$$\frac{(n-1)!}{(s+1)^n(s-1)^n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} D(n;k) \frac{1}{2^{2n-k-1}} \left[\frac{1}{(s+1)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-1)^{k+1}} \right],$$

gdzie $D(n;k) = (2n-k-2)!/(n-k-1)!$. Zamieniając następnie s na $s/j\omega$, otrzymujemy

$$\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(2\omega)^{2n}}{(s^2 + \omega^2)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} j^{k+1} D(n;k) (2\omega)^{k+1} \left[\frac{1}{(s+j\omega)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-j\omega)^{k+1}} \right].$$

Zauważając, że

$$\frac{1}{(s+j\omega)^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(s-j\omega)^{k+1}} \hat{=} \frac{1}{k!} t^k \left[e^{j\omega t} + (-1)^{k+1} e^{-j\omega t} \right]$$

oraz

$$e^{j\omega t} + (-1)^{k+1} e^{-j\omega t} = \begin{cases} 2j \sin \omega t, & \text{dla } k = 0, 2, 4, \dots \\ 2 \cos \omega t, & \text{dla } k = 1, 3, 5, \dots, \end{cases}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1}(n-1)!(2\omega)^{2n} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^n} \\ \hat{=} & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parzyste}}}^{n-1} j^{k+2} 2D(n;k) (2\omega)^{k+1} \frac{1}{k!} t^k \sin \omega t \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ nieparzyste}}}^{n-1} j^{k+1} 2D(n;k) (2\omega)^{k+1} \frac{1}{k!} t^k \cos \omega t. \end{aligned}$$

Ćwiczenie A.9 Korzystając z ostatniego przykładu i reguły o różniczkowaniu względem s , znaleźć oryginał funkcji $s/(s^2 + \omega^2)^n$.

Ćwiczenie A.10 Sprawdzić, że

$$\frac{1}{s(Ts+1)} \hat{=} 1 - e^{-t/T}.$$

Ćwiczenie A.11 *Sprawdzić, że*

$$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)} \hat{=} 1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}.$$

Ćwiczenie A.12 *Sprawdzić, że*

$$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)} \hat{=} e^{-at} + e^{-bt}.$$

Ćwiczenie A.13 *Sprawdzić, że*

$$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \hat{=} 1 - \cos \omega t.$$

A.3 Własności graniczne

W poniższych dwóch twierdzeniach nazywanych granicznymi s jest zmienną rzeczywistą, natomiast $f(t)$ funkcją określoną na półprostej $t \in [0, \infty)$.

Twierdzenie A.5 (Abel) *Niech funkcja $f(t)$ spełnia założenie (A.1). Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ istnieje, to*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Dowód. Niech $s > 0$. Ponieważ $s \int_0^\infty e^{-st} dt = 1$, więc, dla $g = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, możemy napisać

$$sF(s) - g = s \int_0^\infty (f(t) - g) e^{-st} dt = V_T(s) + W_T(s),$$

gdzie $V_T(s) = s \int_0^T (f(t) - g) e^{-st} dt$, $W_T(s) = s \int_T^\infty (f(t) - g) e^{-st} dt$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} |V_T(s)| &\leq s \int_0^T e^{-st} dt \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - g| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - g|. \end{aligned}$$

Uwzględniając (A.1) i oznaczając $\int_0^\infty |f(t) - g| e^{-\rho t} dt = c$, otrzymujemy, dla $s > \rho$,

$$\begin{aligned} |W_T(s)| &\leq s \int_T^\infty |f(t) - g| e^{-\rho t} e^{-(s-\rho)t} dt \\ &\leq s e^{-(s-\rho)T} \int_T^\infty |f(t) - g| e^{-\rho t} dt \\ &\leq c s e^{-(s-\rho)T} = c e^{\rho T} s e^{-sT}. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} |f(t) - g| = 0$, zatem istnieje T , zależne od ε , takie, że $|V_T(s)| < \varepsilon/2$. Dla takiego T istnieje s tak duże, że $|W_T(s)| < \varepsilon/2$. Wykazaliśmy zatem, że dla każdego ε istnieje s tak duże, że $|sF(s) - g| < \varepsilon$. Ponieważ ε może być dowolnie małe, a więc wynika stąd teza. ■

Twierdzenie A.6 (Abel) *Niech funkcja $f(t)$ spełnia założenie (A.1). Jeśli granica $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ istnieje, to*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

Dowód. Niech $s > 0$. Ponieważ $s \int_0^\infty e^{-st} dt = 1$, zatem, dla $\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, otrzymujemy

$$sF(s) - \gamma = s \int_0^\infty (f(t) - \gamma) e^{-st} dt = P_T(s) + R_T(s),$$

przy czym $P_T(s) = s \int_0^T (f(t) - \gamma) e^{-st} dt$ oraz $R_T(s) = s \int_T^\infty (f(t) - \gamma) e^{-st} dt$. Jest oczywiste, że

$$|P_T(s)| \leq s \int_0^T |f(t) - \gamma| dt$$

oraz

$$\begin{aligned} |R_T(s)| &\leq s \int_T^\infty e^{-st} dt \sup_{T \leq t < \infty} |f(t) - \gamma| \\ &\leq \sup_{T \leq t < \infty} |f(t) - \gamma|. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) - \gamma| = 0$, więc istnieje T takie, że $|R_T(s)| < \varepsilon/2$. Z (A.1) wynika, że $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$. Zatem, dla takiego T istnieje z kolei tak małe s , że $|P_T(s)| < \varepsilon/2$. Ostatecznie, dla każdego ε istnieje s tak małe, że $|sF(s) - \gamma| < \varepsilon$, co kończy dowód. ■

Założenia o tym, że granice $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ oraz $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ istnieją są istotne w obydwu twierdzeniach. Zauważmy bowiem, że $\mathfrak{L}\{\sin \omega t\} = s/(s^2 + \omega^2)$, skąd wynika $\lim_{t \rightarrow \infty} s\mathfrak{L}\{\sin \omega t\} = 0$. Nie upoważnia to jednak do wyciągnięcia wniosku, że granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \omega t$ istnieje i jest równa zero.

Powyższe dwa twierdzenia graniczne prowadzą do przydatnych wniosków. Niech teraz

$$g(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{M(s)} \right\},$$

gdzie $N(s)$ oraz $M(s)$ są wielomianami jak w § A.2. Z twierdzenia A.3 wynika następująca własność i lemat:

Własność A.1 Niech $n < m$. Funkcja $g(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na domkniętej półprostej $[0, \infty)$.

Lemat A.3 Jeśli

$$\operatorname{Re} s_1 < 0, \dots, \operatorname{Re} s_m < 0, \quad (\text{A.22})$$

to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że nierówności (A.22) oznaczają, że pierwiastki wielomianu $M(s)$ oznaczone jak w twierdzeniu A.1 spełniają następujące nierówności: $\xi_1 < 0, \dots, \xi_p < 0, \sigma_1 < 0, \dots, \sigma_q < 0$. Wynika stąd, że wszystkie składniki sumy po prawej stronie w (A.19) zbiegają się do zera, gdy $t \rightarrow \infty$, co kończy dowód. ■

Wykorzystując twierdzenie A.5, możemy zbadać własności $g(t)$ w punkcie $t = 0$.

Lemat A.4 Niech $n < m$ i niech $p = m - n$. Funkcja $g(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $t = 0$. Ponadto, dla $p = 1$,

$$g(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0$$

oraz, dla $p \geq 2$,

$$g(0) = g^{(1)}(0) = \dots = g^{(p-2)}(0) = 0$$

i dopiero

$$g^{(p-1)}(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że różniczkowalność w punkcie $t = 0$ jest zapewniona przez własność A.1. Wynika z niej, że $\lim_{t \rightarrow 0} g^{(i)}(t) = g^{(i)}(0)$, dla $i = 0, 1, \dots$

Dla $p = 1$, z twierdzenia granicznego A.5 wynika, że

$$g(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sN(s)}{M(s)} = \frac{b_n}{a_m}.$$

Dla $p > 1$ dowód jest nieco dłuższy. Zaczniemy od oczywistego faktu, że

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{p-1}G(s) = 0, \quad (\text{A.23})$$

gdzie $G(s) = N(s)/M(s)$. Odwołując się do wspomnianego twierdzenia granicznego, możemy napisać, że $g(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)$. Korzystając z (A.23), otrzymujemy $g(0) = 0$.

Z powyższego wynika, że $\mathfrak{L}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0) = sG(s)$. Z twierdzenia A.5 wnioskujemy następnie, że $g'(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathfrak{L}\{g'(t)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2G(s)$, co, w świetle (A.23), daje $g'(0) = 0$.

Powtarzając powyższe rozumowanie odpowiednią ilość razy dochodzimy do wniosku, że $g^{(p-2)}(0) = 0$. W ostatnim wreszcie kroku otrzymujemy $g^{(p-1)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^pG(s) = b^n/a^m$, co kończy dowód. ■

Niech teraz

$$h(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{sM(s)} \right\}.$$

Z lematu A.4 wynika kolejny:

Lemat A.5 Niech $n \leq m$ i niech $p = m - n$. Funkcja $h(t)$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $t = 0$. Ponadto, dla $p = 0$,

$$h(0) = \frac{b_m}{a_m} \neq 0$$

oraz, dla $p \geq 1$,

$$h(0) = h^{(1)}(0) = \dots = h^{(p-1)}(0) = 0$$

i dopiero

$$h^{(p)}(0) = \frac{b_n}{a_m} \neq 0.$$

A.4 Równanie różniczkowe

Za pomocą równania różniczkowego opisujemy zachowanie się systemu dynamicznego w sytuacji, gdy zarówno jego wejście jak i wyjście są sygnałami określonymi na całej prostej $t \in (-\infty, \infty)$. W związku z powyższym, wyznaczając transformatę Laplace'a pochodnej, stosujemy regułę (A.11).

Równanie różniczkowe rzędu m ma postać jak poniżej

$$\begin{aligned} & a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) \\ = & b_l u^{(l)}(t) + b_{l-1} u^{(l-1)}(t) + \dots + b_0 u(t), \end{aligned}$$

$t \in (-\infty, \infty)$, przy czym

$$\lim_{t \rightarrow 0-} y(t), \lim_{t \rightarrow 0-} y^{(1)}(t), \dots, \lim_{t \rightarrow 0-} y^{(m-1)}(0)$$

jest warunkiem początkowym, który, dla prostoty, zapiszemy jak poniżej

$$y(0-), y^{(1)}(0-), \dots, y^{(m-1)}(0-).$$

Znana funkcja $u(t)$ ma przy tym tę własność, że $u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots = u^{(l-1)}(0-) = 0$.

W celu rozwiązania równania dokonamy transformacji Laplace'a obydwu jego stron. Zgodnie z (A.11) stwierdzamy, że

$$\mathfrak{L}\{y^{(1)}(t)\} = sY(s) - y(0-),$$

$$\mathfrak{L}\{y^{(2)}(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0-) - y^{(1)}(0-),$$

itd. Ponieważ $u(0-) = u^{(1)}(0-) = \dots = u^{(l-1)}(0-) = 0$, zatem $\mathfrak{L}\{u^{(1)}(t)\} = sU(s)$, $\mathfrak{L}\{u^{(2)}(t)\} = s^2 U(s)$, \dots , $\mathfrak{L}\{u^{(l)}(t)\} = s^l U(s)$. Obustronna transformacja daje więc

$$(a_m s^m + \dots + a_0)Y(s) - W(s) = (b_l s^l + \dots + b_0)U(s),$$

skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{b_l s^l + \dots + b_0}{a_m s^m + \dots + a_0} U(s) + \frac{W(s)}{a_m s^m + \dots + a_0},$$

gdzie $W(s)$ jest wielomianem stopnia $m - 1$ zależnym od warunku początkowego i współczynników a_0, \dots, a_{m-1} . Ostateczne rozwiązanie równania wymaga znalezienia oryginału funkcji $Y(s)$.

Przykład A.17 Niech

$$y'(t) + 2y(t) = u(t),$$

przy czym $u(t) = 1(t)$ oraz $y(0-) = 3$. Dokonując obustronnej transformacji Laplace'a, otrzymujemy $sY(s) - y(0-) + 2Y(s) = U(s)$, co daje

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}U(s) + y(0-)\frac{1}{s+2}.$$

Ponieważ $U(s) = 1/s$, więc

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{3}{s+2} = \frac{1}{2s} + \frac{5}{2} \frac{1}{s+2},$$

skąd wynika, że $y(t) = 1/2 + (5/2)e^{-2t}$ dla $t \geq 0$.

A.5 Funkcja $e^{\mathbf{A}t}$

Dla dowolnej macierzy kwadratowej \mathbf{A} przyjmujemy

$$e^{\mathbf{A}t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

W szczególności, dla $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, zachodzą równości

$$e^{\mathbf{I}t} = \begin{bmatrix} e^t & & \\ & \ddots & \\ & & e^t \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad e^{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & e \end{bmatrix}.$$

Zauważmy także, że

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

jest macierzą, której wszystkie elementy są funkcjami wymiernymi. W każdej z nich stopień wielomianu w mianowniku, czyli $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, jest równy stopniowi macierzy \mathbf{A} (tzn. liczbie jej wierszy). Stopień wielomianu w liczniku, czyli odpowiedni element macierzy dołączonej $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, nie jest natomiast wyższy od tego w mianowniku. Oryginał każdego elementu jest zatem funkcją ciągłą, nieskończenie wiele razy różniczkowalną, patrz własność A.1. W rezultacie dochodzimy do wniosku, że $e^{\mathbf{A}t}$ jest funkcją ciągłą, nieskończenie wiele razy różniczkowalną.

Dzięki wprowadzeniu funkcji $e^{\mathbf{A}t}$ można łatwo zapisać rozwiązanie liniowego wektorowego równania różniczkowego o postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

gdzie \mathbf{x} jest kolumnowym wektorem k -wymiarowym, natomiast \mathbf{A} macierzą stopnia k , tzn. macierzą kwadratową o k wierszach i kolumnach. Dokonując transformacji Laplace'a wobec obydwu stron równania, otrzymujemy $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$, skąd wynika, że $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$. Ostatecznie zatem $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$, co oznacza, że

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

Pokażemy teraz podstawowe własności funkcji $e^{\mathbf{A}t}$. Przede wszystkim zauważmy, że jest ona macierzą kwadratową o stopniu takim samym jak stopień \mathbf{A} . Podstawiając $t = 0$, otrzymujemy $\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{0}}\mathbf{x}(0)$ dla każdego $\mathbf{x}(0)$. Stąd

$$\boxed{e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}.}$$

Zwracamy uwagę, że $\mathbf{0}$ jest macierzą kwadratową, której wszystkie elementy są równe zero. Ponieważ $e^{\mathbf{A}t}$ jest funkcją ciągłą, wynika stąd w sposób oczywisty, że $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$.

Zauważmy, że $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}\mathbf{x}(0)$. Z drugiej strony $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(\tau)$ oraz $\mathbf{x}(\tau) = e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$, skąd wynika, że $\mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$. Dla każdego $\mathbf{x}(0)$ zatem $e^{\mathbf{A}(t+\tau)}\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0)$. Ostatecznie

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}(t+\tau)}.}$$

W szczególności zatem

$$\boxed{e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{A}} = e^{2\mathbf{A}}.}$$

Warto przy okazji zaznaczyć, że, dla macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} tego samego stopnia, na ogół $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$. Podstawiając $t = 1$, $\tau = -1$, a następnie $t = -1$, $\tau = 1$, dostajemy odpowiednio $e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ i $e^{-\mathbf{A}}e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$. Wynika stąd, że $\det e^{\mathbf{A}} \neq 0$ dla każdej macierzy \mathbf{A} oraz

$$\boxed{(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}.}$$

Korzystając z reguły o transformacji pochodnej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}\right\} &= s\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} - e^{\mathbf{0}} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{I} \\ &= [s\mathbf{I} - (s\mathbf{I} - \mathbf{A})](s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}}$$

Drugą z powyższych równości można zweryfikować podobnie jak pierwszą.

Przykład A.18 Oznaczając $\mathbf{S}_k = \sum_{n=0}^k (s^{-1}\mathbf{A})^n$, bez trudu zauważamy, że $\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{S}_k + (s^{-1}\mathbf{A})^{k+1}$ oraz $\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{I} + s^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_k$. Wynika zatem stąd, iż $\mathbf{S}_k = (\mathbf{I} - s^{-1}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - (s^{-1}\mathbf{A})^{k+1})$. Ponieważ, dla wystarczająco dużego s , $(s^{-1}\mathbf{A})^k \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $k \rightarrow \infty$, więc $\sum_{n=0}^{\infty} s^{-n}\mathbf{A}^n = (\mathbf{I} - s^{-1}\mathbf{A})^{-1}$, skąd wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} s^{-(n+1)}\mathbf{A}^n = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a i uwzględniając (A.5), otrzymujemy

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n \quad \text{oraz} \quad e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n.$$

Ćwiczenie A.14 Wykazać, że jeśli $\det \mathbf{A} \neq 0$, to

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}.$$

Jak wiadomo, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz \mathbf{A} jest stabilna, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wartości własne leżą w lewej półpłaszczyźnie, [8]. Sprawdzić, że dla stabilnej macierzy \mathbf{A} prawdziwy jest wzór

$$\int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} dt = \mathbf{A}^{-1}.$$

Przykład A.19 Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

wyliczamy

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s+1)(s+2)$ oraz

$$\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix},$$

więc

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Stąd

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

i w szczególności

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} - e^{-2} \\ -3e^{-1} + 3e^{-2} & -e^{-1} + 2e^{-2} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie A.15 Sprawdzić, że jeśli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

to

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t - t & t \\ t & e^t - t \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{C}t} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie A.16 Nawiązując do znanych wzorów $2j \sin a = e^{ja} - e^{-ja}$ oraz $2 \cos a = e^{ja} + e^{-ja}$, możemy zdefiniować

$$\sin \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2j} (e^{j\mathbf{A}} - e^{-j\mathbf{A}}) \quad \text{oraz} \quad \cos \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (e^{j\mathbf{A}} + e^{-j\mathbf{A}}).$$

Sprawdzić, że $\sin^2 \mathbf{A} + \cos^2 \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

A.6 Transformacja Fouriera

Niech $x(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ będzie funkcją taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.24})$$

Jej transformatą, lub całką, Fouriera $\tilde{X}(\omega)$ nazywa się

$$\tilde{X}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{A.25})$$

a operację, która przeprowadza $x(t)$ w $\tilde{X}(\omega)$ – transformacją Fouriera. Odwrotna transformacja stwierdza, że

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{A.26})$$

Twierdzenie A.7 (wzór Parsewala) *Jeśli funkcja $x(t)$ spełnia (A.24), to*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Korzystając z (A.26), otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] dt,$$

co po zmianie kolejności całkowania daje

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)\tilde{X}^*(\omega) d\omega$$

i kończy dowód. ■

Nietrudno sprawdzić, że jeśli

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau,$$

to

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{F}(\omega)\tilde{G}(\omega).$$

W rozważaniach poniżej zakładamy dodatkowo, że

$$x(t) = 0, \text{ dla } t < 0, \quad (\text{A.27})$$

co pozwala zapisać (A.24) jako

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (\text{A.28})$$

Własność A.2 Niech $x(t)$ spełnia (A.27) i (A.28). Dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[\tilde{X}(\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $h(t)$ równa się $x(-t)$ i $x(t)$ odpowiednio dla $t < 0$ i $t \geq 0$, co oznacza, że $h(t)$ jest funkcją parzystą na prostej $(-\infty, \infty)$. Na mocy definicji,

$$\tilde{H}(\omega) = \int_{-\infty}^0 h(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt,$$

która to funkcja jest równa

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \tilde{X}^*(\omega) + \tilde{X}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \tilde{X}(\omega), \end{aligned}$$

co, ze względu na (A.26), doprowadza do wniosku, że

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)] \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Dla uzyskania ostatniej równości uwzględniliśmy to, że $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ oraz parzystość funkcji $\operatorname{Re}[\tilde{X}(\omega)]$. Ponieważ $h(t) = x(t)$ dla $t \geq 0$, zatem otrzymaliśmy pierwszą część tezy.

Niech teraz $f(t)$ równa się $x(t)$ i $x(-t)$ odpowiednio dla $t < 0$ oraz $t \geq 0$. Ponieważ $f(t)$ jest funkcją nieparzystą, więc argumentując jak powyżej zauważamy, że $\tilde{F}(\omega) = -\tilde{X}(-\omega) + \tilde{X}(\omega) = 2j \operatorname{Im} \tilde{X}(\omega)$. Dochodzimy w ten sposób do wniosku o prawdziwości drugiej części tezy. ■

Jak łatwo zauważyć, funkcja $x(t)$ spełniająca (A.27) i (A.28) ma zarówno transformatę Fouriera $\tilde{X}(\omega)$ jak i Laplace'a $X(s)$, przy czym

$$\tilde{X}(\omega) = X(j\omega). \quad (\text{A.29})$$

Dla funkcji takiej wzór Parsevala przyjmuje postać:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{A.30})$$

Przykład A.20 Niech $\mathfrak{L}\{x(t)\} = 1/(Ts + 1)$. Ponieważ

$$\int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 T^2 + 1} d\omega = \frac{\pi}{2T},$$

zatem $\int_0^{\infty} x^2(t) dt = 1/2T$.

Jako wniosek z (A.29) i własności A.2 otrzymujemy następną własność:

Własność A.3 Niech $x(t)$ spełnia (A.27) i (A.28). Dla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[X(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[X(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Ćwiczenie A.17 Wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega)\tilde{Y}^*(\omega) d\omega,$$

co jest uogólnieniem wzoru Parsewala.

Ćwiczenie A.18 Wykazać, że transformatą Fouriera impulsu Diraca $\delta(t)$ jest $e^{-j\omega}$, a funkcji $e^{-x^2/2}$ jest $\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$.

Ćwiczenie A.19 Niech $h_n(t) = (1/\sqrt{2^n(n!)\sqrt{\pi}})e^{-t^2/2}H_n(t)$, gdzie $H_n(t) = (-1)^n e^{x^2} (d^n/dt^n) e^{-x^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, jest wielomianem Hermite'a². Funkcje $h_n(t)$ tworzą zupełny układ ortonormalny na prostej $(-\infty, \infty)$, co oznacza między innymi, że $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)h_m(t) dt = 0$ dla $n \neq m$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)^2 dt = 1$. Sprawdzić, że $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = 2t$, $H_2(t) = 4t^2 - 2$ itd. Korzystając następnie z tego, że $\tilde{h}_n(\omega) = (-j)^n \sqrt{2\pi} h_n(\omega)$, gdzie $\tilde{h}_n(\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $h_n(t)$, wykazać, że jeśli $k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(t)$, to $\tilde{K}(\omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n \alpha_n \tilde{h}_n(\omega)$.

²G.G. Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications*, CRC Press, Boca Raton, 1994.

Dodatek B

Transformacja \mathcal{Z}

B.1 Definicja i własności

B.1.1 Definicja

Niech $\{x_n; n = 0, 1, \dots\}$ będzie ciągiem liczbowym takim, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty \quad (\text{B.1})$$

dla pewnego $\rho > 0$. Transformacja \mathcal{Z} przyporządkowuje mu funkcję $X(z)$ zmiennej zespolonej z zdefiniowaną następująco, patrz np. [7]:

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \quad (\text{B.2})$$

Zauważmy, że dla $|z| \geq \rho$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} \left(\frac{\rho}{|z|}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty,$$

skąd wynika, że szereg w (B.2) jest zbieżny w pierścieniu $|z| \geq \rho$. W pierścieniu tym zatem transformata $X(z)$ istnieje. Jest oczywiste, że istnieją ciągi, które nie spełniają warunku (B.1), np. $x_n = \exp(n^2)$.

Odwrotna transformacja wyraża się natomiast wzorem

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j} X(z) z^{n-1} dz,$$

$n = 0, 1, \dots$, gdzie σ jest tak duże, że wszystkie bieguny funkcji $X(z)z^{n-1}$ leżą na lewo od prostej $\operatorname{Re} z = \sigma$.

Będziemy także pisać $\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$ oraz $\{x_n\} = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$. Następną konwencją, to oznaczanie przez np. $X(z)$, $G(z)$ transformat ciągów $\{x_n\}$ i $\{g_n\}$. Będziemy także pisać $Y(z) \hat{=} \{y_n\}$ lub po prostu $Y(z) \hat{=} y_n$.

Wprowadzimy teraz operator opóźnienia, czyli przesunięcia w prawo. Dla oznaczenia ciągu $\{x_{n-1}\}$ będziemy pisać niekiedy $\mathcal{D}\{x_n\}$. Innymi słowy, \mathcal{D} jest operatorem przesunięcia w prawo o 1, czyli opóźnienia. Na tej samej zasadzie \mathcal{D}^k opóźnia o k , co oznacza, że

$$\mathcal{D}^k\{x_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{n-k}\}. \quad (\text{B.3})$$

Zarówno transformacja \mathcal{Z} , jak i \mathcal{Z}^{-1} są operacjami liniowymi, tzn.

$$\boxed{\alpha x_n + \beta y_n \hat{=} \alpha X(z) + \beta Y(z)}$$

Podstawowe własności transformacji \mathcal{Z} , to:

- przesunięcie w lewo o 1, czyli przyspieszenie

$$\boxed{x_{n+1} \hat{=} zX(z) - zx_0}$$

- różniczkowanie względem z

$$\boxed{nx_n \hat{=} -z \frac{d}{dz} X(z)}$$

- zmiana skali zmiennej z

$$\boxed{\lambda^{-n} x_n \hat{=} X(\lambda z)}$$

- transformata ciągu będącego sumą

$$\boxed{\sum_{i=0}^n x_i \hat{=} \frac{z}{z-1} X(z)}$$

- transformata splotu

$$\sum_{i=0}^n x_{n-i}y_i \hat{=} X(z)Y(z)$$

Ćwiczenie B.1 *Zauważmy, że*

$$-z \frac{d}{dz} X(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{d}{dz} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} n x_n z^{-n} = \mathcal{Z}\{n x_n\},$$

co oznacza prawdziwość reguły o różniczkowaniu względem z .

Ćwiczenie B.2 *W celu sprawdzenia reguły o transformacie ciągu przesuniętego w lewo, zauważmy, że*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} &= x_1 + x_2 z^{-1} + x_3 z^{-2} + \dots \\ &= z(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots) - z x_0 \\ &= zX(z) - z x_0. \end{aligned}$$

Ćwiczenie B.3 *Dla sprawdzenia reguły o splocie spostrzegamy, że*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n x_{n-i}y_i\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n x_{n-i}y_i z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} x_{n-i} z^{-(n-i)} y_i z^{-i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i} \\ &= X(z)Y(z). \end{aligned}$$

Ćwiczenie B.4 *Aby zweryfikować regułę o transformacie ciągu będącego sumą zauważamy, że $\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n x_i 1_{n-i}$, gdzie 1_n jest ciągiem o wszystkich wyrazach równych 1, i stosujemy następnie regułę o transformacie splotu, otrzymując*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n x_i\right\} &= \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n x_i 1_{n-i}\right\} = X(z)\mathcal{Z}\{1_n\} \\ &= X(z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} X(z). \end{aligned}$$

Ćwiczenie B.5 Wykazać, że jeśli $x_n = x_{n+N}$ dla każdego n , tzn. jeśli ciąg x_n jest periodyczny o okresie N , to $X(z) = z^N X_N(z)/(z^N - 1)$, gdzie $X_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n z^{-n}$.

Ćwiczenie B.6 Sprawdzić, że jeśli $x_n = 0$ dla $n = N + 1, N + 2, \dots$, to $X(z) = P(z)/z^N$, gdzie $P(z)$ jest wielomianem o stopniu nie wyższym niż N .

B.1.2 Ciągi określone na całej osi czasu

Załóżmy, że ciąg x_n określony jest na całej osi czasu, tzn. że

$$\{x_n; n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}.$$

Jest przy tym oczywiste, że jego transformata jest taka sama jak ciągu x_0, x_1, x_2, \dots . Łatwo sprawdzić, że wobec takiego ciągu obowiązują wszystkie własności podane w § B.1.1. W szczególności, ciąg

$$1_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots \\ 1, & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

będziemy nazywać dyskretnym skokiem jednostkowym, a

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots \\ 1, & \text{dla } n = 0, \\ 0, & \text{dla } n = -1, -2, \dots, \end{cases}$$

dyskretnym impulsem Diraca.

Ciąg $\{x_n; n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ można poddać operacji przesunięcia w prawo, czyli opóźnienia, otrzymując w ten sposób $\{x_{n-1}\}$. Łatwo zauważyć, że ma miejsce następująca własność:

- przesunięcie w prawo o 1, czyli opóźnienie

$$\boxed{x_{n-1} \hat{=} z^{-1}X(z) + x_{-1}} \quad (\text{B.4})$$

W szczególności zatem, jeśli $\dots, x_{-2} = x_{-1} = 0$, to $x_{n-1} \hat{=} z^{-1}X(z)$. Jak łatwo sprawdzić

$$x_{n-2} \hat{=} z^{-2}X(z) + zx_{-1} + x_{-2}.$$

Ćwiczenie B.7 Dla zweryfikowania (B.4) wystarczy napisać

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_{n-1}\} &= x_{-1} + x_0 z^{-1} + x_1 z^{-2} + \dots \\ &= x_{-1} + z^{-1}(x_0 + x_1 z^{-1} + \dots). \end{aligned}$$

B.1.3 Transformaty wybranych ciągów

Z definicji transformacji wynika, że

$$\delta_n \hat{=} 1_n$$

oraz

$$1_n \hat{=} \frac{z}{z-1}.$$

Do ostatniego wyniku można dojść spostrzegając, że $1_n = \sum_{i=0}^n \delta_n$ i stosując regułę o transformacie ciągu będącego sumą.

Bezpośrednio z definicji transformaty wnioskujemy, że

$$\lambda^n \hat{=} \frac{z}{z-\lambda}. \quad (\text{B.5})$$

Korzystając teraz z reguły o różniczkowaniu względem z , otrzymujemy

$$n\lambda^n \hat{=} \frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}.$$

Stosując tę regułę wobec powyższego, dochodzimy do wniosku, że

$$n^2\lambda^n \hat{=} \frac{\lambda z(z+\lambda)}{(z-\lambda)^3}.$$

W szczególności zatem

$$n \hat{=} \frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{oraz} \quad n^2 \hat{=} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Z (B.5) wynika, że $e^{j\omega n} \hat{=} z/(z - e^{j\omega n})$ i $e^{-j\omega n} \hat{=} z/(z - e^{-j\omega n})$. Wiedząc zatem, że $2j \sin \omega n = e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}$ i $2 \cos \omega n = e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}$, otrzymujemy

$$\sin \omega n \hat{=} \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1},$$

czyli

$$\sin \omega n \hat{=} \frac{z \sin \omega}{(z - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}$$

oraz

$$\cos \omega n \hat{=} \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1},$$

tzn.

$$\cos \omega n \hat{=} \frac{z^2 - z \cos \omega}{(z - \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega}.$$

Przykład B.1 Wychodząc z transformaty ciągu $\sin \omega n$ i stosując regułę o różniczkowaniu względem z , możemy napisać

$$n \sin \omega n \hat{=} \frac{z(z^2 - 1) \sin \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}.$$

Podobnie postępując wobec ciągu $\cos \omega n$, znajdujemy

$$n \cos \omega n \hat{=} \frac{z(z^2 \cos \omega - 2z + \cos \omega)}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}.$$

Przykład B.2 Korzystamy teraz z rezultatu poprzedniego przykładu i zamieniamy z na z/λ . Stosujemy następnie odpowiednią regułę i otrzymujemy

$$\lambda^n n \sin \omega n \hat{=} \frac{\lambda^2 z (z^2 - \lambda^2) \sin \omega}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$$

oraz

$$\lambda^n n \cos \omega n \hat{=} \frac{\lambda^2 z (z^2 \cos \omega - 2z \lambda + \lambda^2 \cos \omega)}{(z^2 - 2z \lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}.$$

Przykład B.3 Niech k będzie liczbą naturalną. Różniczkując obydwie strony równości

$$\frac{z^k}{z - \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{k-n-1}$$

$k - 1$ razy względem λ , otrzymujemy

$$\frac{z^k}{(z - \lambda)^k} = \frac{1}{(k - 1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(k) \lambda^n z^{-n},$$

gdzie

$$\theta_n(k) = \frac{(n + k - 1)!}{n!}. \quad (\text{B.6})$$

Zatem

$$\frac{z^k}{(z - \lambda)^k} \hat{=} \frac{1}{(k - 1)!} \theta_n(k) \lambda^n. \quad (\text{B.7})$$

Przykład B.4 Stosując teraz, wobec ciągu w (B.7), obustronnie $k - 1$ razy regułę o przesunięciu w prawo, dochodzimy do wniosku, że

$$\boxed{\frac{z}{(z - \lambda)^k} \hat{=} \frac{1}{(k - 1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{\lambda^n \theta_n(k)\}}. \quad (\text{B.8})$$

Przykład B.5 Niech teraz $\lambda = |\lambda|e^{j\omega}$ i $\rho = e^{j\varphi}$. Korzystając z (B.5), po nietrudnych przekształceniach dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\rho z}{z - \lambda} + \frac{\bar{\rho} z}{z - \bar{\lambda}} \hat{=} 2|\lambda|^n \cos(\omega n + \varphi). \quad (\text{B.9})$$

Podobnie

$$\frac{\rho z^k}{(z - \lambda)^k} + \frac{\bar{\rho} z^k}{(z - \bar{\lambda})^k} \hat{=} \frac{2}{(k - 1)!} |\lambda|^n \theta_n(k) \cos(\omega n + \varphi), \quad (\text{B.10})$$

gdzie $\theta_n(k)$ jest jak w (B.6). Stąd

$$\begin{aligned} & \frac{\rho z}{(z - \lambda)^k} + \frac{\bar{\rho} z}{(z - \bar{\lambda})^k} \\ & \hat{=} 2 \frac{1}{(k - 1)!} \mathcal{D}^{k-1} \{|\lambda|^n \theta_n(k) \cos(\omega n + \varphi)\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Przykład B.6 Niech \mathbf{x}_n będzie ciągiem wektorów zdefiniowanych przez następującą rekurencję: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$, $n = 0, 1, \dots$, gdzie \mathbf{A} jest dowolną macierzą. Dokonując obustronnego przekształcenia \mathcal{Z} wobec obydwu stron równania rekurencyjnego, otrzymujemy $z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(z)$, skąd wynika, że $\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$. Z drugiej strony jest oczywiste, że $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$. Zatem

$$\boxed{\mathbf{A}^n \hat{=} (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}. \quad (\text{B.12})$$

Przykład B.7 Transformata może być funkcją niewymierną, np. $1/n! \hat{=} e^{-z}$.

B.2 Oryginały funkcji wymiernych

Znajdziemy teraz oryginał funkcji wymiernej $R(z)/M(z)$, gdzie $R(z)$ i $M(z)$ są wielomianami o stopniach r i m , tzn.

$$R(z) = b_r z^r + b_{r-1} z^{r-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

gdzie $b_r \neq 0$, oraz

$$M(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1z + a_0,$$

przy czym $a_0 \neq 0$. Z definicji transformacji wynika, że jeśli $R(z)/M(z)$ jest transformatą, to $r \leq m$. W dalszych rozważaniach zatem

- $r \leq m$
- oraz pierwiastki wielomianów $R(z)$ i $M(z)$ są różne.

Twierdzenie B.1 (bieguny dowolne) Niech wielomian $M(z)$ ma pierwiastki:

- ▷ rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, różne o krotnościach k_1, k_2, \dots, k_p ,
 - ▷ pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$, różne o krotnościach $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_q$,
- (co oznacza, że $\sum_{i=1}^p k_i + 2 \sum_{i=1}^q \kappa_i = m$). Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{R(z)}{M(z)} &\hat{=} \alpha_0 \delta_n + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \frac{1}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{ \xi_i^n \theta_n(j) \} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} |\beta_{ij}| \frac{1}{(j-1)!} \mathcal{D}^{j-1} \{ |\eta_i|^n \theta_n(j) \cos(\omega_i n + \varphi_{ij}) \}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

gdzie $\theta_n(k)$ jest jak w (B.6), natomiast

$$\alpha_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R(z)}{M(z)}, \quad (\text{B.14})$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(k_i - j)!} \lim_{z \rightarrow \xi_i} \frac{d^{k_i-j}}{dz^{k_i-j}} \left[(z - \xi_i)^{k_i} \frac{R(z)}{zM(z)} \right]$$

oraz

$$\beta_{ij} = \frac{1}{(\kappa_i - j)!} \lim_{z \rightarrow \eta_i} \frac{d^{\kappa_i-j}}{dz^{\kappa_i-j}} \left[(z - \eta_i)^{\kappa_i} \frac{R(z)}{zM(z)} \right],$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\varphi_{ij} = \arg \beta_{ij}$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że argumentacja podobna do tej z dowodu twierdzenia A.1 prowadzi do wniosku, że

$$\frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - \xi_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\kappa_i} \left[\frac{\beta_{ij}}{(z - \eta_i)^j} + \frac{\bar{\beta}_{ij}}{(z - \bar{\eta}_i)^j} \right],$$

a następnie pomnożyć obie strony przez z i skorzystać z (B.8) i (B.11). ■

Warto zwrócić teraz uwagę na to, że na ułamki proste, tzn. ułamki postaci $1/(z-a)$, rozłożyliśmy w dowodzie funkcję $R(z)/zM(z)$. W rezultacie $R(z)/M(z)$ jest liniową kombinacją ułamków typu $z/(z-a)$, których oryginały nietrudno znaleźć. W postępowaniu tym jest więc pewna różnica wobec opisanego w części dotyczącej rozkładu na ułamki proste związanego z transformacją Laplace'a.

Następne twierdzenie jest w zasadzie wnioskiem z poprzedniego.

Twierdzenie B.2 (bieguny jednokrotne) *Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu $M(z)$ są jednokrotne, a dokładniej:*

▷ rzeczywiste $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, różne,

▷ pary zespolone $(\eta_1, \bar{\eta}_1), \dots, (\eta_q, \bar{\eta}_q)$, gdzie $\eta_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, q$, różne

(co oznacza, że $p + q = m$), to

$$\frac{R(z)}{M(z)} \hat{=} \frac{R(0)}{M(0)} \delta_n + \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i^n + 2 \sum_{i=1}^q 2|\beta_i| |\eta_i|^n \cos(\omega_i n + \varphi_i),$$

gdzie

$$\alpha_i = \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) \frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{R(\xi_i)}{\xi_i M'(\xi_i)},$$

$$\beta_i = \lim_{z \rightarrow \eta_i} (z - \eta_i) \frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{R(\eta_i)}{\eta_i M'(\eta_i)},$$

przy czym $\omega_i = \arg \eta_i$, $\varphi_i = \arg \beta_i$.

Dowód. Ponieważ $M(z)$ nie ma pierwiastka w punkcie $z = 0$, więc

$$\frac{R(z)}{zM(z)} = \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{z - \xi_i} + \sum_{i=1}^q \left[\frac{\beta_i}{z - \eta_i} + \frac{\bar{\beta}_i}{z - \bar{\eta}_i} \right].$$

Korzystając z (B.5) i (B.9), łatwo znajdujemy oryginał funkcji $R(z)/M(z)$. ■

Przykład B.8 *Aby znaleźć oryginał funkcji*

$$\frac{1}{(z+1)(3z-1)},$$

zaczynamy od rozłożenia na ułamki proste funkcji

$$\frac{1}{z(z+1)(3z-1)},$$

co doprowadza do równości

$$\frac{1}{z(z+1)(3z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{9}{4} \frac{1}{3z-1}.$$

Stąd

$$\frac{1}{(z+1)(3z-1)} = -1 + \frac{1}{4} \frac{z}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{z}{z-1/3}.$$

Zatem oryginałem jest $-\delta_n + (1/4)(-1)^n + (3/4)(1/3)^n$.

Przykład B.9 Ponieważ, dla $\xi \neq \eta$,

$$\frac{(\xi - \eta)z}{(z - \xi)(z - \eta)} = \frac{z}{z - \xi} - \frac{z}{z - \eta},$$

zatem

$$\frac{(\xi - \eta)z}{(z - \xi)(z - \eta)} \hat{=} \xi^n - \eta^n.$$

Przykład B.10 Niech wielomian $z^2 + pz + q$ ma parę pierwiastków zespolonych z_1 i z_2 . Z poprzedniego przykładu wynika, że

$$\frac{(z_1 - z_2)z}{(z - z_1)(z - z_2)} \hat{=} z_1^n - z_2^n.$$

Oznaczając $z_1 = \rho e^{j\omega}$, gdzie $\rho = |z_1|$ oraz $\omega = \arg z_1$, wiedząc, że $z_2 = \rho e^{-j\omega}$, możemy napisać $z_1 - z_2 = \rho(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = 2j\rho \sin \omega$. Ponadto, ponieważ $z_1^n = \rho^n e^{j\omega n}$ oraz $z_2^n = \rho^n e^{-j\omega n}$, więc $z_1^n - z_2^n = \rho^n(e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}) = 2j\rho^n \sin \omega n$. Ostatecznie

$$\frac{z}{z^2 + pz + q} \hat{=} \frac{1}{\sin \omega} \rho^{n-1} \sin \omega n.$$

B.3 Własności graniczne

Twierdzenia graniczne

W poniższych dwóch twierdzeniach nazywanych granicznymi z jest rzeczywiste.

Twierdzenie B.3 Dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunek (B.1) istnienia transformaty \mathcal{Z} prawdziwy jest wzór

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Dowód. Jest oczywiste, że

$$X(z) - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} - x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n+1}.$$

Zauważmy, że, dla $z \geq \rho$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{-n+1} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| z^{-n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n+1} \left(\frac{\rho}{z}\right)^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n+1} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} \leq \rho c, \end{aligned}$$

gdzie, na mocy (B.1), $c = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \rho^{-n} < \infty$. W rezultacie, dla $z \geq \rho$, $|X(z) - x_0| \leq \rho c/z$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie B.4 Niech ciąg $\{x_n\}$ spełnia założenie (B.1). Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ istnieje, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1^+} (z-1)X(z).$$

Dowód. Niech $z \geq 1$. Oznaczając $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ i wiedząc, że $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = z/(z-1)$, możemy napisać

$$\frac{z-1}{z} X(z) - x = \frac{z-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - x) z^{-n} = V_N(z) + W_N(z),$$

gdzie

$$\begin{aligned} V_N(z) &= \frac{z-1}{z} \sum_{n=0}^N (x_n - x) z^{-n}, \\ W_N(z) &= \frac{z-1}{z} \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n - x) z^{-n}. \end{aligned}$$

Jest oczywiste, że $|V_N(z)| \leq \delta(N+1)(z-1)/z$, gdzie $\delta = \sup_n |x_n - x|$, oraz

$$\begin{aligned} |W_N(z)| &\leq \frac{z-1}{z} \left(\sup_{n>N} |x_n - x| \right) \sum_{k=N+1}^{\infty} z^{-k} \\ &\leq \frac{z-1}{z} \left(\sup_{n>N} |x_n - x| \right) \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sup_{n>N} |x_n - x|. \end{aligned}$$

Niech teraz $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$, więc istnieje N , zależne od ε , dla którego $|W_N(z)| < \varepsilon/2$. Dla takiego właśnie N istnieje z tak bliskie 1, że $|V_N(z)| < \varepsilon/2$. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{z-1}{z} X(z) - g \right| < \varepsilon,$$

jeśli tylko z jest wystarczająco bliskie 1, co kończy dowód. ■

Własności graniczne pewnych ciągów

Zacniemy od wykazania prawdziwości przydatnego lematu.

Lemat B.1 *Dla ciągu $\theta_n(k)$ określonego wzorem (B.6) prawdziwe są nierówności*

$$n^k \leq \theta_n(k) \leq 2^k n^k.$$

Dowód. Ponieważ $\theta_n(k) = (n+1) \cdots (n+k-1)$, więc lewa nierówność jest oczywista. Prawa wynika z nierówności

$$\theta_n(k) \leq (n+k)^k = n^k \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k \leq 2^k n^k,$$

co kończy dowód. ■

Oznaczmy teraz

$$g_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R(z)}{M(z)} \right\},$$

gdzie $R(z)$ oraz $M(z)$ są wielomianami jak w § B.2.

Własność B.1 *Jeśli $|z_1| < 1, |z_2| < 1, \dots, |z_m| < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$.*

Dowód. Korzystając z lematu B.1, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(k) \lambda^n = 0,$$

jeśli tylko $|\lambda| < 1$. Zatem każdy ze składników sumy w (B.13) zbiega się do zera, gdy $n \rightarrow \infty$ (operacja opóźnienia o $k-1$ nie ma tutaj znaczenia). ■

Własność B.2 *Niech $k = m - p$. Prawdziwe są następujące związki:*

$$g_0 = \cdots = g_{k-1} = 0 \text{ i dopiero } g_k = \frac{b_p}{a_m} \neq 0.$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\frac{R(z)}{M(z)} = \gamma_k z^{-k} + \gamma_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots,$$

gdzie $\gamma_k = b_p/a_m$, i odwołać się do definicji transformacji \mathcal{Z} . ■

B.4 Dyskretna transformacja Fouriera

Dla ciągu $\{x_n; n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ takiego, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty, \quad (\text{B.15})$$

dyskretna transformata Fouriera i jej odwrotność dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \bar{X}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega}, \\ x_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{jn\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Twierdzenie B.5 (wzór Parsewala) Dla każdego ciągu spełniającego warunek (B.15) prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega.$$

Dowód. Ze wzoru na odwrotne przekształcenie Fouriera wynika, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_0^{2\pi} \bar{X}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\omega n} \right] \bar{X}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{X}^*(\omega) \bar{X}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\bar{X}(\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

W rozważaniach poniżej zakładamy dodatkowo, że

$$x_n = 0, \text{ dla } n < 0, \quad (\text{B.17})$$

co pozwala zapisać (B.15) jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty. \quad (\text{B.18})$$

Własność B.3 Niech x_n spełnia (B.17) i (B.18). Dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}[\bar{X}(\omega)] \cos(\omega n) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Im}[\bar{X}(\omega)] \sin(\omega n) d\omega. \end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ własność ta jest dyskretnym odpowiednikiem własności A.2, zatem dowód jest podobny. ■

Ciąg $\{x_n\}$ spełniający (B.17) i (B.18) ma zarówno transformatę Fouriera $\bar{X}(\omega)$ jak i \mathcal{Z} , oznaczaną jako $X(z)$, przy czym

$$\bar{X}(\omega) = X(e^{j\omega}). \quad (\text{B.19})$$

Wzór Parsewala przyjmuje zatem postać:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (\text{B.20})$$

Jako wniosek z (B.19) i własności B.3 otrzymujemy następną własność:

Własność B.4 Niech $\{x_n\}$ spełnia (B.17) i (B.18). Dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] \cos(\omega n) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] \sin(\omega n) d\omega. \end{aligned}$$

B.5 Równanie różnicowe

Równanie

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y_{n-m} = b_m u_n + b_{m-1} u_{n-1} + \cdots + b_0 u_{n-m},$$

$a_m \neq 0, a_0 \neq 0$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, nazywamy liniowym równaniem różnicowym rzędu m . Opisuje ono reakcję systemu na pobudzenie

$$\dots, u_3 = 0, u_2 = 0, u_{-1} = 0, u_0, u_1, u_2, \dots$$

w sytuacji, gdy warunkiem początkowym jest

$$y_{-m}, \dots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1},$$

tzn. zestaw m liczb. Ciągi $\{y_n\}$ oraz $\{u_n\}$ określone są dla $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Dla $n = 0$ otrzymujemy

$$a_m y_0 + a_{m-1} y_{-1} + \cdots + a_0 y_{-m} = b_m u_0 + b_{m-1} u_{-1} + \cdots + b_0 u_{-m},$$

skąd, z uwagi na to, że znany jest warunek początkowy i pobudzenie, wynika y_0 . Dla $n = 1$ znajdujemy natomiast

$$a_m y_1 + a_{m-1} y_0 + \cdots + a_0 y_{1-m} = b_m u_1 + b_{m-1} u_0 + \cdots + b_0 u_{1-m},$$

skąd wynika y_1 , ponieważ y_0 zostało przed chwilą wyznaczone. Dla $n = 2$ równanie to ustala y_2 , dla $n = 3$ wyznacza ono y_3 itd. W ten sposób znajdujemy ciąg y_0, y_1, y_2, \dots , czyli rozwiązujemy równanie.

Rozwiązać równanie można także stosując transformację \mathcal{Z} . Przy znajdowaniu transformacji ciągów opóźnionych, tzn. y_{n-k} , stosuje się regułę (B.4). Zatem

$$\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = z^{-1}Y(z) + y_{-1},$$

$$\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2},$$

oraz, ogólnie,

$$\mathcal{Z}\{y_{n-k}\} = z^{-k}Y(z) + z^{-k+1}y_{-1} + \cdots + z^{-1}y_{-k+1} + y_{-k}.$$

Ze względu na to, że $0 = u_{-1} = u_{-2} = \dots$, obserwujemy natomiast, że

$$\mathcal{Z}\{u_{n-k}\} = z^{-k}U(z).$$

Wykonanie obustronnego przekształcenia \mathcal{Z} wobec równania różnicowego daje zatem

$$\begin{aligned} & (a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m})Y(z) - V(z^{-1}) \\ = & (b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m})U(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$V(z^{-1}) = w_{m-1} + w_{m-2}z^{-1} + \dots + w_0z^{-m+1},$$

przy czym współczynniki w_0, w_2, \dots, w_{m-1} zależą od $y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-m}$ oraz a_0, \dots, a_m . Zatem

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}U(z) \\ &+ \frac{V(z^{-1})}{a_m + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}} \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}U(z) \\ &+ \frac{zW(z)}{a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0}, \end{aligned}$$

gdzie

$$W(z) = z^{m-1}V(z^{-1}) = w_{m-1}z^{m-1} + \dots + w_1z + w_0z.$$

Jeśli $Y(z)$ jest funkcją wymierną, to jej oryginał $\{y_n\}$ można znaleźć metodą rozkładu na ułamki proste.

Zauważmy, że rozwiązanie równania zależy od $y_{-m}, y_{m-1}, \dots, y_{-1}$, lecz jest niezależne od wcześniejszych wyjść, tzn. od $\dots, y_{-m-2}, y_{-m-1}$. Reasumując, pokazaliśmy jak za pomocą transformacji \mathcal{Z} rozwiązać równanie różnicowe.

Przykład B.11 Niech równaniem różnicowym będzie

$$y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = 2u_n + 3u_{n-1},$$

$y_{-2} = 2, y_{-1} = 4$ warunkiem początkowymi oraz $u_n = \delta_n$ pobudzeniem. Ponieważ

$$\mathcal{Z}\{y_{n-1}\} = z^{-1}Y(z) + y_{-1} = z^{-1}Y(z) + 4$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_{n-2}\} &= z^{-2}Y(z) + z^{-1}y_{-1} + y_{-2} \\ &= z^{-2}Y(z) + 4z^{-1} + 2,\end{aligned}$$

więc transformacja obu stron równania daje

$$(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})Y(z) + 24z^{-1} - 8 = (2 + 3z^{-1})U(z).$$

Zatem

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{2 + 3z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}U(z) + \frac{8 - 24z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} \\ &= \frac{2z^2 + 3z}{z^2 - 5z + 6}U(z) + \frac{8z^2 - 24z}{z^2 - 5z + 6}.\end{aligned}$$

Uwzględniając to, że $U(z) = 1$, otrzymujemy ostatecznie

$$Y(z) = \frac{10z^2 - 21z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{10z^2 - 21z}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z-2} + \frac{9z}{z-3},$$

skąd wynika, że $y_n = 2^n + 9 \times 3^n = 2^n + 3^{n+2}$.

Przykład B.12 Niech

$$y_n + y_{n-1} - 2y_{n-2} = 3u_{n-2} + 4u_{n-3}$$

oraz $u_n = \delta_n$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$. Ponieważ

$$(1 + z^{-1} - 2z^{-2})Y(z) + (2z^{-1}y_{-1} + 2y_{-2} + y_{-1}) = (3z^{-2} + 4z^{-3})U(z),$$

więc

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{3z + 4}{z(z^2 + z - 2)}U(z) - \frac{2z^2y_{-2} + z^2y_{-1} + 2zy_{-1}}{z^2 + z - 2} \\ &= \frac{3z + 4}{z(z-1)(z+2)}U(z) - \frac{2z^2y_{-2} + z^2y_{-1} + 2zy_{-1}}{(z-1)(z+2)}.\end{aligned}$$

Dla danego warunku początkowego i pobudzenia otrzymujemy zatem

$$Y(z) = \frac{3z + 4}{z(z-1)(z+2)} - \frac{8z^2 + 4z}{(z-1)(z+2)}.$$

Uwzględniając to, że

$$\begin{aligned} \frac{3z+4}{z(z-1)(z+2)} &= -2\frac{1}{z} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{6}\frac{z}{z+2} \\ &\hat{=} -2\delta_{n-1} - \frac{5}{2}\delta_n + \frac{7}{3} + \frac{1}{6}(-2)^n \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{8z^2+4z}{(z-1)(z+2)} = \frac{4z}{z-1} + \frac{4z}{z+2} \hat{=} 4 + 4(-2)^n,$$

otrzymujemy

$$y_n = -2\delta_{n-1} - \frac{5}{2}\delta_n + \frac{19}{3} + \frac{25}{6}(-2)^n.$$

B.6 Transformacja \mathcal{Z} , a transformacja Laplace'a

Ciąg liczbowy $\{x_n; n = 0, 1, \dots\}$ o transformacie $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$ w sposób jednoznaczny skojarzony jest z ciągiem impulsów Diraca

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \delta(t - nT),$$

gdzie T jest dowolną liczbą dodatnią. Poddanie $x^*(t)$ transformacji Laplace'a daje $X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-nsT}$. Zatem, dla $z = e^{sT}$, po prawej stronie otrzymujemy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$, czyli $X(z)$. Możemy więc napisać

$$X^*\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = X(z), \text{ tzn. } X^*(s) = X(e^{nsT}).$$

W celu przeprowadzenia analizy częstotliwościowej sygnału $x^*(t)$, czyli sygnału o czasie ciągłym, posługujemy się funkcją $X^*(j\omega)$. Dlatego też podobna analiza ciągu liczbowego $\{x_n; n = 0, 1, \dots\}$, czyli sygnału dyskretnego, związana jest z badaniem funkcji $X^*(e^{j\omega nT}) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}$.

Dodatek C

Procesy stochastyczne drugiego rzędu

Omówimy teraz podstawowe własności sygnałów o wartościach losowych, czyli procesów stochastycznych. Czas zmienia się przy tym w sposób ciągły lub dyskretny. W rozważaniach naszych \mathbb{E} oznacza wartość oczekiwaną. Dla stacjonarnego procesu stochastycznego $X(t)$, $m_X = \mathbb{E}X(t)$, natomiast σ_X^2 oraz $\text{var}[X]$ oznaczają wariancję, czyli $\mathbb{E}(X(t) - m_X)^2$.

C.1 Procesy z czasem ciągłym

Definicja C.1 Rodzina $X(t)$, gdzie $t \in (-\infty, \infty)$, zmiennych losowych takich, że $\mathbb{E}X^2(t) < \infty$ dla każdego t nazywa się procesem stochastycznym drugiego rzędu.

C.1.1 Funkcja korelacji, gęstość widmowa

Dla procesu drugiego rzędu definiuje się następującą funkcję korelacji::

$$R_X(\tau, t) = \mathbb{E}\{X(\tau)X(t)\}.$$

Definicja C.2 Jeśli $\mathbb{E}X(t) = \text{const}$ oraz $R_X(\tau, t) = R_X(\tau - t, 0)$, to mówimy, że proces jest stacjonarny (a dokładniej, stacjonarny w szerszym sensie).

Dla prostoty, zamiast $R_X(\tau, 0)$ będziemy pisać krótko $R_X(\tau)$ (tzn. będziemy pomijać drugi argument). Dla procesów stacjonarnych zatem

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}\{X(t)X(t + \tau)\}$$

dla każdego t .

Własność C.1 *Funkcja korelacji procesu stacjonarnego ma następujące własności:*

- (a) $R_X(\tau) = R_X(-\tau),$
- (b) $R_X(0) = \mathbb{E}X^2(t) = \mathbb{E}^2 X(t) + \text{var}[X(t)],$
- (c) $|R_X(\tau)| \leq R_X(0).$

Dowód. Własności (a) i (b) są oczywiste, natomiast (c) wynika z następującej nierówności: $\mathbb{E}^2\{X(t)X(t+\tau)\} \leq \mathbb{E}X^2(t)\mathbb{E}X^2(t+\tau) = \mathbb{E}^2 X^2(t)$. Z (b) i tego, że $\mathbb{E}X(t) = \text{const}$ wynika, że także $\text{var}[X(t)] = \text{const}$. ■

Założmy teraz, że $\mathbb{E}X(t) = 0$, tzn. że wartość średnia procesu jest równa zero. Jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)|d\tau < \infty$, to dla procesu takiego definiujemy funkcję gęstości widmowej

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

która jest, rzecz jasna, transformatą Fouriera funkcji korelacji. Zatem

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (\text{C.1})$$

Ponieważ $R_X(\tau)$ jest funkcją parzystą, więc gęstość widmowa wyraża się wzorem $S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cos(\omega\tau)d\tau$, skąd wynika, że $S_X(\omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste. Jest oczywiste, że ponadto $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$. Z (C.1) wynika, że $R_X(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega$, co, po uwzględnieniu (c), daje

$$\mathbb{E}X^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)d\omega. \quad (\text{C.2})$$

Interpretując $\mathbb{E}X^2(t)$ jako moc sygnału zauważamy więc, że jest ona proporcjonalna do całki z gęstości widmowej.

Przykład C.1 *Jeśli $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$, to $S(\omega) = 2\alpha/(\omega^2 + \alpha^2)$.*

Niech $X(t)$ i $Y(t)$ będą dwoma stacjonarnymi procesami drugiego rzędu. Funkcją korelacji wzajemnej nazywamy

$$R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}\{X(t+\tau)Y(t)\},$$

gdzie t jest dowolne. Jeśli $\int_{-\infty}^{\infty} |R_{XY}(\tau)|d\tau < \infty$, to jej całka Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

istnieje i nazywa się funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Zauważamy, że $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ i, siłą rzeczy, $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$.

Niech teraz $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Jak łatwo sprawdzić,

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega),$$

gdzie $R_X(\tau)$ i $R_Y(\tau)$ są funkcjami korelacji procesów $X(t)$ i $Y(t)$, natomiast $S_X(\omega)$ i $S_Y(\omega)$ ich gęstościami widmowymi. Jeśli procesy nie są skorelowane, tzn. jeśli $\mathbb{E}\{X(t)Y(\tau)\} = \mathbb{E}X(t)\mathbb{E}Y(\tau)$, to

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + 2\mathbb{E}X(t)\mathbb{E}Y(t).$$

Jeśli zatem $\mathbb{E}X(t) = \mathbb{E}Y(t) = 0$, to

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau),$$

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

C.1.2 Biały szum

Jeśli $\mathbb{E}X(t) = 0$ i $R_X(\tau) = \sigma_X^2 \delta(\tau)$, $\sigma_X^2 > 0$, to mówimy, że proces jest stacjonarnym białym szumem o zerowej średniej. Zauważmy, że, ponieważ $\delta(t) = 0$ dla $\tau \neq 0$, więc $|R_X(\tau)| = 0$ dla $\tau \neq 0$. Zatem, dla $\tau \neq 0$, $\mathbb{E}\{X(\tau)X(\tau+t)\} = 0$, co oznacza, że zmienne losowe $X(\tau)$ i $X(\tau+t)$ nie są skorelowane. Dla procesu takiego $S_X(\omega) = \sigma_X^2$, skąd wynika, że $\mathbb{E}X^2(t) = \infty$. Moc białego szumu jest zatem nieskończona. Nie jest to więc proces fizyczny, lecz jedynie pewna, wygodna abstrakcja. Z tego samego też powodu nie jest to proces drugiego rzędu (w takim procesie bowiem $\mathbb{E}X^2(t) < \infty$).

Jeśli $Y(t) = X(t) + m_X$, $m_X \neq 0$, to $R_Y(\tau) = m_X^2 + \sigma_X^2 \delta(\tau)$. $Y(t)$ jest stacjonarnym białym szumem o średniej m_X . Ponieważ $\int_0^\infty |R_Y(\tau)| d\tau = \infty$, zatem proces taki nie ma gęstości widmowej.

Przykład C.2 Niech $Z(t) = X(t) + Y(t)$, gdzie $X(t)$ jest białym szumem o funkcji korelacji $R_X(\tau) = \delta(\tau)$, natomiast $Y(t)$ nieskorelowanym z nim procesem o funkcji korelacji $R_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$. Zatem $R_Z(\tau) = \delta(\tau) + e^{-|\tau|}$ oraz $S_Z(\omega) = 1 + 1/(\omega^2 + 1)$, patrz przykład C.1.

C.1.3 Całka i pochodna procesu

Całka i pochodna średniokwadratowa

W wielu zastosowaniach istnieje potrzeba operowania całką $\int_0^T f(t)X(t)dt$, gdzie $f(t)$ jest pewną ustaloną funkcją, a $X(t)$ stacjonarnym procesem drugiego rzędu. Problemem jest to, że własności funkcji czasu $X(t)$, czyli realizacji procesu stochastycznego, nie gwarantują istnienia tej całki (jak wiadomo, dla przykładu całka Riemanna $\int_0^T X(t)dt$ istniałaby, gdyby realizacja $X(t)$ procesu była wystarczająco gładka). Z tego powodu należy dostosować definicję całki do zaistniałej sytuacji, co czynimy poniżej.

Dla stacjonarnego procesu $X(t)$ drugiego rzędu określimy całkę średniokwadratową na odcinku $[a, b]$, gdzie $a < b$. Niech teraz $\{t_0, \dots, t_n\}$ będzie zbiorem punktów takich, że $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$, tzn. punktów dzielących odcinek $[a, b]$ na przedziały i niech Δ_n będzie długością najdłuższego z nich, tzn. niech $\Delta_n = \max_i(t_i - t_{i-1})$. Dla takiego podziału definiujemy $I_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)X(t_i)(t_i - t_{i-1})$. Jest oczywiste, że I_n jest zmienną losową. Weźmy teraz pod uwagę ciąg podziałów taki, że $\Delta_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Jeśli istnieje liczba I taka, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(I_n - I)^2 = 0$ niezależnie od sposobu podziału odcinka, to mówimy, że całka średniokwadratowa $\int_a^b f(t)X(t)dt$ istnieje i jest równa I . Zwróćmy przy tym uwagę na to, że wartość tej całki, tzn. I , jest zmienną losową. W sposób naturalny pojęcie całki średniokwadratowej na odcinku rozszerza się do całki na całej prostej $(-\infty, \infty)$.

Warunek, przy którym całka średniokwadratowa istnieje, podaje poniższe twierdzenie, patrz [10].

Twierdzenie C.1 *Całka średniokwadratowa $\int_a^b f(t)X(t)dt$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_a^b \int_a^b f(\xi)f(\eta)R_X(\xi - \eta)d\xi d\eta$ (może być przy tym tak, że $a = -\infty$ lub $b = \infty$).*

Z podanego twierdzenia wynika prosty wniosek:

Wniosek C.1 *Całka średniokwadratowa $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)X(\tau)d\tau$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje następująca całka Riemanna $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi)f(t - \eta)R_X(\xi - \eta)d\xi d\eta$.*

Uwaga C.1 *Dla $X(t)$ będącego białym szumem całkę $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)X(\tau)d\tau$ będziemy traktować w sposób formalny, patrz [10].*

Omówimy teraz pojęcie pochodnej procesu drugiego rzędu. Podamy najpierw definicję ciągłości procesu.

Definicja C.3 *Proces $X(t)$ drugiego rzędu nazywa się ciągłym średniokwadratowo, jeśli $\mathbb{E}(X(t+h) - X(t))^2 \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$.*

Powyższą zbieżność zapisuje się także w następującej postaci:

$$X(t+h) \rightarrow X(t), \text{ gdy } h \rightarrow 0 \text{ według średniej drugiego rzędu.}$$

Ciągłość wiąże się bezpośrednio z funkcją korelacji, ponieważ stacjonarny proces $X(t)$ drugiego rzędu jest ciągły średniokwadratowo wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\tau \rightarrow 0} R_X(\tau) \rightarrow R_X(0)$. Jest bowiem oczywiste, że $\mathbb{E}(X(t+h) - X(t))^2 = 2\mathbb{E}X^2(t) - 2R_X(h)$.

Definicja C.4 *Pochodną $\dot{X}(t)$ średniokwadratową w punkcie t stacjonarnego procesu $X(t)$ drugiego rzędu nazywamy*

$$\dot{X}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \text{ według średniej drugiego rzędu.}$$

Ciągłość, jak się nietrudno domyśleć, nie wystarcza do różniczkowalności procesu. Pochodna średniokwadratowa procesu $X(t)$ istnieje bowiem dla każdego $t \in (-\infty, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pochodna $R'_X(0)$, patrz [10].

C.2 Procesy z czasem dyskretnym

Niech teraz $\{\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Niech ponadto $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Ciąg ten nazywa się dyskretnym procesem stochastycznym. Funkcją korelacji tego procesu jest

$$R_X(n) = \mathbb{E}\{X_{n+m}X_m\}, \quad (\text{C.3})$$

gdzie m jest dowolne. Funkcja ta ma następujące własności:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & R_X(-n) = R_X(n), \\ (\beta) \quad & |R_X(n)| \leq R_X(0), \\ (\gamma) \quad & R_X(0) = \mathbb{E}X_n^2. \end{aligned}$$

Własności (α) oraz (γ) są oczywiste, natomiast (β) wynika stąd, że $\mathbb{E}^2|X_0X_n| \leq \mathbb{E}X_0^2\mathbb{E}X_n^2$.

Założmy teraz, że średnia tego procesu jest równa zero, tzn. że $\mathbb{E}X_n = 0$. Jeśli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_X(n)| < \infty$, to istnieje gęstość widmowa $S_X(\omega)$ zdefiniowana jak następuje:

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n)e^{-j\omega n}, \quad (\text{C.4})$$

będąca transformatą Fouriera funkcji korelacji. Zatem

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_X(\omega)e^{j\omega n} d\omega. \quad (\text{C.5})$$

Ponieważ $R_X(n)$ jest funkcją parzystą, więc $S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n) \cos \omega n$, skąd wynika, że $S_X(\omega)$ przyjmuje wartości rzeczywiste oraz $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$. Z (C.5) wynika, że $R_X(0) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} S_X(\omega) d\omega$, co, z uwagi na (7), daje

$$\mathbb{E}X_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_X(\omega)e^{j\omega n} d\omega.$$

Jeśli $R_X(n) = \sigma_X^2 \delta_n$, gdzie δ_n jest dyskretnym impulsem Diraca, to mówimy, że proces jest białym szumem. Dla białego szumu zatem $\mathbb{E}\{X_n X_m\} = 0$ dla $n \neq m$, co oznacza, że X_n i X_m są nieskorelowane dla $n \neq m$.

Dla dwóch stacjonarnych procesów X_n i Y_n ,

$$R_{XY}(n) = \mathbb{E}\{X_{n+m} Y_m\},$$

m dowolne, nazywa się funkcją korelacji wzajemnej, a jej całkę Fouriera

$$S_{XY}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XY}(n)e^{-j\omega n}$$

funkcją wzajemnej gęstości widmowej. Oznaczając $Z_n = X_n + Y_n$, możemy napisać:

$$\begin{aligned} R_Z(n) &= R_X(n) + R_Y(n) + R_{XY}(n) + R_{YX}(n), \\ S_Z(\omega) &= S_X(\omega) + S_Y(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega). \end{aligned}$$

Jeśli procesy X_n i Y_n nie są skorelowane, tzn. jeśli $\mathbb{E}\{X_n Y_m\} = \mathbb{E}X_n \mathbb{E}Y_m$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n) + 2\mathbb{E}X_n \mathbb{E}Y_n.$$

Jeśli ponadto $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}Y_n = 0$, to

$$R_Z(n) = R_X(n) + R_Y(n)$$

oraz

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega).$$

Dodatek D

Tablice transformat

D.1 Transformacja Laplace'a

$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{-\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$

$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{-\sigma t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(s + \sigma)}{((s + \sigma)^2 + \omega^2)^2}$
$te^{-\sigma t} \cos \omega t$	$\frac{(s + \sigma)^2 - \omega^2}{((s + \sigma)^2 + \omega^2)^2}$

D.2 Transformacja \mathcal{Z}

δ_n	1
1_n	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
λ^n	$\frac{z}{z-\lambda}$
$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\lambda^n$	$\frac{z^2}{(z-\lambda)^2}$
$\frac{(n+k)!}{k!n!}\lambda^n$	$\frac{z^{k+1}}{(z-\lambda)^{k+1}}$
$\frac{1}{k!}\mathcal{D}^k \left\{ \frac{(n+k)!}{n!}\lambda^n \right\}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos \omega n$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$n \sin \omega n$	$\frac{z(z^2 - 1) \sin \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}$
$n \cos \omega n$	$\frac{z(z^2 \cos \omega - 2z + \cos \omega)}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)^2}$

Uwaga: \mathcal{D} jest operatorem opóźnienia o 1

$\lambda^n \sin \omega n$	$\frac{\lambda z \sin \omega}{z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2}$
$\lambda^n \cos \omega n$	$\frac{z^2 - z\lambda \cos \omega}{z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2}$
$\lambda^n n \sin \omega n$	$\frac{\lambda^2 (z^2 - \lambda^2) \sin \omega}{(z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$
$\lambda^n n \cos \omega n$	$\frac{\lambda^2 z (z^2 \cos \omega - 2z\lambda + \lambda^2 \cos \omega)}{(z^2 - 2z\lambda \cos \omega + \lambda^2)^2}$

Literatura

- [1] Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*, Warszawa, WNT 1974.
- [2] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, Warszawa, PWN 1996.
- [3] Nowacki P., Szklarski L., Górecki H., *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*, Warszawa, PWN 1970.
- [4] Pełczewski W., *Teoria sterowania*, Warszawa, WNT 1980.
- [5] Szparkowski Z., *Zarys teorii regulacji układów liniowych*, Warszawa, WNT 1960.
- [6] Węgrzyn S., *Podstawy automatyki*, Warszawa, WNT 1976.

Literatura uzupełniająca

- [7] Jury E.I., *Przekształcenie Z i jego zastosowania*, Warszawa, WNT 1970.
- [8] Lancaster P., Tismenetsky M., *Theory of Matrices*, San Diego, Academic Press 1985
- [9] Osowski J., *Zarys rachunku operatorowego*, Warszawa, WNT 1981.
- [10] Wong E., *Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych*, Warszawa, WNT 1976.
- [11] Zemanian A.H., *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, Warszawa, PWN 1969.

Indeks

- biały szum, 251
- całka średniokwadratowa, 252
- charakterystyka częstotliwościowa
 - amplitudowo-fazowa, 31, 135
 - logarytmiczna, 31
 - przybliżona, 54
- człon
 - całkujący, 49
 - całkujący z inercją, 50
 - inercyjny, 44, 45, 47
 - oscylacyjny, 48
 - proporcjonalny, 43
 - różniczkujący, 52
 - różniczkujący z inercją, 53
- ekstrapolator, 184
- funkcja
 - e^{At} , 224
 - korelacji, 249, 250, 253
 - wymierna, 209
- gęstość widmowa, 250, 254
- impuls Diraca, 204
 - dyskretny, 234
- impulsator, 183
- kryterium stabilności
 - Hurwitza, 78, 166
 - Jury'ego, 168
 - Liénarda–Chiparta, 80
 - Michajłowa, 85, 166, 172
 - Nyquista, 90, 95–97, 173–175, 177
 - Routha–Hurwitza, 76, 165
 - twierdzenie o współczynnikach, 74
- odpowiedź
 - impulsowa, 22, 61, 67, 136
 - na sinusoidę, 64, 156
 - skokowa, 25, 63, 67, 140
- proces stochastyczny, 249
 - dyskretny, 253
- równanie
 - charakterystyczne, 13, 131
 - fazowe, 33, 68, 142
 - różnicowe, 129, 245
 - wektorowe, 144
 - różniczkowe, 12, 223
 - wektorowe, 35
- regulacja
 - astatyczna, 107, 181
 - I, 108, 181
 - P, 103, 105, 180
 - PI, 110, 182
 - PID, 112
 - statyczna, 103, 180
- skok jednostkowy, 203

- dyskretny, 234
- splot, 32, 142
- stabilność, 58, 152
- system
 - równoległy, 20, 134
 - szeregowy, 20, 134
 - ze sprzężeniem zwrotnym, 21, 88, 135
- system automatycznej regulacji, 99, 100, 179, 188
- otwarty, 99, 179

- trajektoria fazowa, 34, 69, 143
- transformacja \mathcal{Z} , 231
 - twierdzenie
 - graniczne, 240, 241
 - o ciągu oryginalnym, 238, 239
- transformacja Fouriera, 227
 - dyskretna, 243
- transformacja Laplace'a, 197
 - twierdzenie
 - graniczne, 219, 220
 - o funkcji oryginalnej, 213, 214
 - o rozkładzie na ułamki proste, 210, 212
- transmitancja, 19, 132
 - uchybowa, 100, 180
 - widmowa, 30, 135
- twierdzenie o stabilności, 58, 152

- ułamek prosty, 209
 - rozkład na, 208
- uchyb, 99, 179

- warunek początkowy, 130, 223, 245
- wielomian charakterystyczny, 12, 131
 - systemu zamkniętego, 89, 180
- wykres Michajłowa, 81, 169
- wzór
 - Orlando, 77
 - Parsevala, 228, 229, 243, 244
- wzmocnienie w stanie ustalonym, 63, 155